Der Boolesche Primidealsatz

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Mathematikers
Fachbereich Mathematik, Universität Hannover

vorgelegt von

Frithjof Dau

Hannnover, August 1994

Der Boolesche Primidealsatz

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Mathematikers
Fachbereich Mathematik, Universität Hannover

vorgelegt von

Frithjof Dau

Hannnover, August 1994

Autor: Frithjof Dau Hopfenberg 7
30982 Pattensen
Tel.: 05066/63906

Referent: Prof. Dr. Marcel Erné, Institut für Mathematik, Hannover

Koreferent: Dr. Michael Holz, Institut für Mathematik, Hannover

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Pattensen, den 1. August 1994

Statt eines Vorwortes

A Note on Piffles

A. B. Smith

A. C. Jones in his paper “A Note on the Theory of Boffles“, Proceedings of the National Society, 13, first defined a Biffle to be a non-definite Boffle and asked if every Biffle was reducible.
C. D. Brown in “On a paper by A. C. Jones“, Biffle, 24, answered in part this question by defining a Wuffle to be a reducible Biffle and he was then able to show that all Wuffles were reducible.
H. Green, P. Smith and D. Jones in their review of Brown’s paper, Wuffle Review, 48, suggested the name Woffle for any Wuffle other than the nontrivial Wuffle and conjectured that the total number of Woffles would be at least as great as the number so far known to exist. They asked is this conjecture was the strongest possible.
T. Brown in “A collection of 250 papers on Woffle Theory dedicated to R. S. Green on his 23rd Birthday“ defined a Piffle to be an infinite multi-variable sub-polynormal Woffle which does not satisfy the lower regular Q-property. He stated, but was unable to prove, that there were at least a finite number of Piffles.
T. Smith, L. Jones, R. Brown and A. Green in their collected works “A short introduction to the classical theory of the Piffle“, Piffle Press, \$20, showed that all bi-universal Piffles were stricly descending and conjectured that to prove a stronger result would be harder.
It is this conjecture which motivated the present paper.

American Math. Monthly Vol. 84, 566, 1977

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Eine der wichtigsten grundlegenden Aussagen der Verbandstheorie ist der Boolesche Primidealsatz, abgekürzt BPI (**B**oolean **P**rime **I**deal Theorem):

BPI: Jeder Boolesche Verband enthält ein Primideal.

Diese Aussage wird normalerweise in der Verbandstheorie mit Hilfe des Auswahlaxioms, abgekürzt AC (**A**xiom of **C**hoice), bewiesen.

AC: Zu jeder Familie $(X_i)_{i\in I}$ nichtleerer Mengen existiert eine Auswahlfunktion, d. h. eine Funktion $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$ für jedes $i \in I$.

Das Auswahlaxiom hat im Gegensatz zu allen anderen Axiomen der Mengenlehre einen sehr nichtkonstruktiven Charakter und auch diverse recht unanschauliche Konsequenzen. Aus diesem Grunde stellte sich schon recht früh die Frage, ob die Hinzunahme des Auswahlaxioms zu den restlichen Axiomen der Mengenlehre nicht zu einem widersprüchlichen Axiomensystem führt, d. h. zu einem Axiomensystem, in dem ein Widerspruch, also z. B. ein Satz der Form $\phi \wedge \neg\phi$, herleitbar ist. Es ist ein elementarer Satz der Logik, daß in einem widersprüchlichen Axiomensystem *jede beliebige* Aussage herleitbar ist, womit ein widersprüchliches Axiomensystem also vollkommen unbrauchbar ist. Nach einem Resultat von Gödel ist es nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit (ein anderer Ausdruck dafür ist *Konsistenz*) eines hinreichend starken Axiomensystems (die Mengenlehre ist so eines) mit Mitteln zu beweisen, die nicht über dieses Axiomensystem hinausführen (siehe [Göde31]). Allerdings war Gödel auch in der Lage, die *relative* Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms zu dem Axiomensystem der Mengenlehre, das ich auch wie allgemein üblich mit ZF bezeichne, nachzuweisen: Er bewies, daß aus der Konsistenz von ZF die Konsistenz von ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom folgt (siehe [Göde40]). Wenn man also an die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre glaubt, und das tun wohl die meisten Mathematiker, so kann man auch unbedenklich das Auswahlaxiom mitbenutzen.

Nach diesem Resultat stellte sich natürlich zwangsläufig die Frage, ob das Auswahlaxiom in der Mengenlehre sogar *beweisbar* ist. Doch es dauert noch einmal bis ca. 1963, bis auch diese Frage geklärt werden konnte. Zu diesem Zeitpunkt bewies Cohen mit der von ihm entwickelten Methode des *Forcing*, daß auch die Negation des Auswahlaxioms konsistent zu ZF ist (siehe [Cohe66]). Für dieses bahnbrechende Resultat erhielt er die Fieldsmedaille, die die höchste Auszeichung in der Mathematik ist (da aufgrund eines Fehltrittes des schwedischen Mathematikers Mittag-Leffler mit der Frau von Alfred Nobel der Nobelpreis den Mathematikern versagt blieb).

Aufgrund dieses Ergebnisses ging man dann mit Hilfe der Forcingmethode dazu über, zu untersuchen, welche Aussagen, die bisher mit Hilfe von AC bewiesen wurden, tatsächlich auch AC in ihrem Beweis benötigen und nicht allein aus ZF hergeleitet werden können, und welche Aussagen andererseits echt schwächer als AC sind. Es ist nach einem Resultat der Logik eine Aussage genau dann aus einem Axiomensystem herleitbar, wenn die Hinzunahme der Negation dieser Aussage zu dem Axiomensystem zu einem widersprüchlichen System führt. Bei der Frage, ob eine Aussage ϕ sich in ZF nicht ohne AC beweisen läßt, ist also zu untersuchen, ob das System ZF+$\{\neg\phi\}$ (das ich auch mit ZF+$\neg\phi$ bezeichne) konsistent ist. Analog läuft die Frage, ob ϕ echt schwächer ist als AC, auf eine Überprüfung der Konsistenz des Systems ZF+ϕ+$\neg$AC hinaus.

Man stellte nun eine ganze Hierarchie von Prinzipien auf, die schwächer sind als das Auswahlaxiom. Diese Prinzipien können sich dabei teilweise implizieren oder auch voneinander unabhängig sein. Beispiele für derartige Prinzipien sind z. B. das Prinzip der abhängigen Auswahlen (principle of **d**ependent **c**hoices, DC), der Boolesche Primidealsatz oder das Auswahlaxiom für abzählbare Familien nichtleerer Mengen. Diese Aussagen wurden früher als Sätze formuliert und mit dem Auswahlaxiom bewiesen. Heute betrachtet man sie häufig als Axiome, die man statt des stärkeren Auswahlaxioms den Axiomen der Mengenlehre hinzufügt. Dabei gibt es einige Prinzipien, die besonders häufig auf diese Art und Weise benutzt werden (BPI und DC sind zwei solche Prinzipien), und es werden nun viele spezielle Sätze dahingehend untersucht, welche Prinzipien ausreichen, um diese Aussagen zu beweisen.

Wie ich bereits erwähnte, ist der Boolesche Primidealsatz echt schwächer als das Auswahlaxiom. Dieses Resultat wurde von Halpern und Lévy 1971 in [HaLé71] bewiesen und nimmt den größten Teil dieser Diplomarbeit ein. Daß der Boolesche Primidealsatz aber nicht in ZF beweisbar ist, will ich hier nur erwähnen (siehe z. B. [Jech66]). Ich möchte auch bemerken, daß der Boolesche Primidealsatz eine herausragende Rolle unter den Prinzipien spielt, die schwächer sind als das Auswahlaxiom. Das hat folgenden Grund: Es gibt eine ganze Reihe zu BPI äquivalenter Aussagen (äquivalent natürlich in ZF) in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, so z. B. in der Logik und Mengenlehre, der unendlichen Kombinatorik, der Topologie, der Algebra oder der Graphentheorie, und aus diesen Äquivalenzen läßt sich in diesen Gebieten wiederum eine große Anzahl von wichtigen Implikationen herleiten. Der Boolesche Primidealsatz ist also nicht eine spezielle, nur für den Verbandstheoretiker interessante Erweiterung von ZF, sondern betrifft fast jeden (reinen) Mathematiker. Aus diesem Grunde versuche ich, in Kapitel 2 einen kleinen Überblick über einige der zu BPI äquivalenten Aussagen zu geben, bevor ich ab Kapitel 3 bereits mit dem Beweis beginne, daß die Theorie ZF+BPI+$\neg$AC widerspruchsfrei ist (unter der Voraussetzung, daß ZF widerspruchsfrei ist).

1.1 Ein Prädikatenkalkül erster Stufe

In diesem Abschnitt möchte ich kurz einen allgemeinen Prädikatenkalkül erster Stufe vorstellen. Dieses Kapitel kann und soll nicht eine Einführung in die formale Logik ersetzen, da eine derartige Einführung den Umfang dieser Diplomarbeit sprengen würde und hier im Grunde auch nicht hingehört. Ähnliches gilt auch für den nächsten Abschnitt, in dem ich eine kurze Einführung in die Axiomatik der Mengenlehre gebe. Ich muß also beim Leser bereits Kenntnisse über diese Themengebiete voraussetzen. Desweiteren werde ich einige Definitionen formal nicht ganz korrekt durchführen (z. B. bei der Definition von „freien Variablenvorkommen“). Die in diesem Kapitel vorgestellten Begriffe findet man in dieser oder einer ähnlichen Form in jedem Buch über die mathematische Logik. Die Axiome des Prädikatenkalküls variieren dabei aber von Autor zu Autor. Den Kalkül, den ich hier vorstelle, ist im wesentlichen aus den Kalkülen von Shoenfield (siehe [Shoe67]) und Mendelson (siehe [Mend64]) zusammengesetzt. Es könnte gewiß noch verkürzt und vereinfacht werden, doch das halte ich in diesem Kontext für unnötig.

Ein Prädikatenkalkül erster Stufe ist die Grundlage, oder anders ausgedrückt, das Fundament der Mengenlehre. Beweise in der Mengenlehre, insbesondere auch sämtliche Beweise in dieser Diplomarbeit, sind also letztendlich als formale Herleitungen von Formeln im Prädikatenkalkül anzusehen. Es ist auch wichtig zu erkennen, daß ich zunächst den Prädikatenkalkül naiv aufbaue. Das ist wie folgt zu verstehen: Wenn ich zum Beispiel sage, daß ich im Kalkül für jede natürliche Zahl eine Variable v_i habe, so ist der Begriff „natürliche Zahl“ naiv und nicht vom von Neumannschen Standpunkt aus zu sehen, bei dem die natürlichen Zahlen bestimmte Mengen sind ($0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc.). Dies wäre ja auch gar nicht möglich, da ich ja die Mengenlehre und Mengen in diesem formalen Sinn noch nicht zur Verfügung habe. Auch in Aussagen wie „$\phi \vee \psi$ entsteht durch Hintereinanderschreiben der Formel ϕ, des Junktors $\vee$ und der Formel ψ“ ist der Begriff „Hintereinanderschreiben“ rein naiv und nicht im Sinne einer noch zu präzisierenden mathematischen Verknüpfung zu sehen. Man kann sich allerdings wie Cohen, der Erfinder des Forcing, sogar noch weiter einschränken und die Prädikatenlogik als einen Teil der Zahlentheorie ansehen, indem nach bekannten Verfahren Formeln, Beweise, Axiome, Schlußregeln etc. durch das sogenannte Gödelisieren durch Zahlen kodiert werden, so daß z. B. das Manipulieren von Formeln nichts anderes ist als ein Umgang mit Zahlen (siehe [Cohe66]). Aber auch bei diesem Ansatz bleibt ein Teil Mathematik, der naiv gehandhabt wird, nämlich die Zahlentheorie.

Wenn ich mich aber erst einmal in der Mengenlehre befinde, kann ich, auch hier durch die Methode des Gödelisierens, die Logik noch einmal in der Mengenlehre selber aufbauen. So bin ich in der Mengenlehre in der Lage, Aussagen über Beweise, Herleitungen etc. zu machen. Genau dies ist natürlich in einem Konsistenzbeweis auch nötig. Diese Logik ist dann sozusagen ein präzises Spiegelbild der ursprünglichen naiven Logik. Man mag es als einen Makel ansehen, daß man die Logik nicht von Anfang an formal präzise aufbauen kann. Es kann auch der Eindruck entstehen, daß man sich bei einer derartigen Vorgehensweise gewissermaßen an den eigenen Haaren aus dem Sumpf (der naiven Vorgehensweise) herausziehen will. Zu dieser Problematik möchte ich Benson Mates zitieren: „Vielleicht paßt ein anderer Vergleich doch besser: Wir verwenden eine schadhafte Maschine, um eine bessere zu bauen, die wir dann benutzen können, um die alte zu überholen“ ([Mate60], zweite Auflage, Seite 60).

Ich möchte nun einen allgemeinen Kalkül für die Prädikatenlogik erster Stufe vorstellen. Dabei sind zwar einige Dinge unnötig, wenn ich später ZF axiomatisieren will (insbesondere der Umgang mit Funktionen), aber ich möchte aus Gründen der Vollständigkeit auch diese Dinge hier mit anführen.

Definition 1.1 Im Kalkül habe ich folgende Zeichen zur Verfügung:

(i) Junktoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$ und $\Longleftrightarrow$.

(ii) Quantoren $\exists$ und $\forall$.

(iii) Das Komma , und die Klammern (sowie).

(iv) Die Gleichheitsrelation $=$.

(v) Variablen v_i für jede natürliche Zahl i.

(vi) Konstantenzeichen c_i für jede natürliche Zahl i.

(vii) Funktionszeichen F_i^n für alle natürliche Zahlen i, n mit $n \geq 1$.

(viii) Prädikatszeichen P_i^n für alle natürlichen Zahlen i, n mit $n \geq 1$.

Definition 1.2 Der Begriff <u>Term</u> wird induktiv definiert:

(i) Jede Variable v_i und jedes Konstantensymbol c_i ist ein Term.

(ii) Sind i, n natürliche Zahlen und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist auch $F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Auch der Begriff <u>Formel</u> wird induktiv definiert:

(i) Sind t_1, t_2 Terme, so ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

(ii) Sind i, n natürliche Zahlen und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

(iii) Sind ϕ, ψ Formeln, so auch $\neg\phi$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \Longrightarrow \psi)$ und $(\phi \Longleftrightarrow \psi)$.

(iv) Ist ϕ eine Formel und ist v_i eine Variable, so sind auch $\exists v_i \phi$ und $\forall v_i \phi$ Formeln.

Dabei ist z.B. (ii) bei der Definition von „Term“ natürlich wie folgt zu verstehen: Sind t_1 und t_2 bereits als Terme erkannte Zeichenketten, so ist die Zeichenkette, die durch Hintereinanderschreiben von „F_i^n“, „(“, der Zeichenkette t_1, „ ,“, der Zeichenkette t_2, „ ,“, ..., der Zeichenkette t_n und „)“ entsteht, wieder ein Term. Zur besseren Lesbarkeit werden im folgenden Formeln nicht immer gemäß dieser genauen Definition aufgeschrieben. Einige Standardkonventionen sind dabei die folgenden: Bei zweistelligen Prädikatensymbolen P_k^2 und zweistelligen Funktionssymbolen F_l^2 schreibt man statt $P_k^2(v_i, v_j)$ bzw. $F_l^2(v_i, v_j)$ häufig auch $v_i\, P_k^2\, v_j$ bzw. $v_i\, F_l^2\, v_j$. Desweiteren verzichtet man oft auf unnötige Klammern. So ist es allgemein üblich, daß die Bindungsstärke der Junktoren $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ in der eben notierten Reihenfolge zunimmt. So ist z. B.

$$v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3 \Longrightarrow v_1 = v_3$$

als

$$((v_1 = v_2 \wedge v_2 = v_3) \Longrightarrow v_1 = v_3)$$

zu lesen. Bestehen dann noch Unklarheiten, so ist die Rechtsklammerung zu benutzten. Die Formel

$$v_{i_1} = v_{j_1} \Rightarrow v_{i_2} = v_{j_2} \Rightarrow \ldots v_{i_n} = v_{j_n} \Rightarrow F_k^n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = F_k^n(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})\ ,$$

die eines der Gleichheitsaxiome ist, ist also als

$$(v_{i_1} = v_{j_1} \Rightarrow (v_{i_2} = v_{j_2} \Rightarrow \ldots (v_{i_n} = v_{j_n} \Rightarrow F_k^n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = F_k^n(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})\,)\ldots))$$

zu verstehen. Schließlich werden nicht immer die genauen Variablennamen benutzt, sondern auch häufig kleine Buchstaben vom Ende des Alphabetes mit oder ohne Indizes wie z. B. x, x_1, y, z_1.

Definition 1.3 Gerät ein Vorkommen einer Variablen in einer Formel in den Geltungsbereich eines Quantors, so heißt dieses Variablenvorkommen gebunden, andernfalls heißt es frei. Dazu ein kleines Beispiel: In der Formel $(\forall x \exists y P_1^3(x, y, z) \wedge \forall x \exists z P_1^3(x, y, z))$ sind alle Vorkommen von x gebunden, ist das erste Vorkommen von y ebenso wie das zweite Vorkommen von z gebunden, und das zweite Vorkommen von y ist wie das erste Vorkommen von z frei. Enthält eine Formel keine freien Variablenvorkommen, so ist sie ein Satz. Ist ϕ eine Formel und t ein Term, so ist $\phi\binom{v_i}{t}$ die Formel, die entsteht, indem man in ϕ alle freien Vorkommen von v_i durch t ersetzt. Eine derartige Ersetzung nennt man auch Substitution . Wenn es zu keinen Mißverständnissen kommen kann, werde ich statt $\phi\binom{v_i}{t}$ häufig einfach nur $\phi(t)$ schreiben.

Definition 1.4 Nun kann ich endlich den eigentlichen Prädikatenkalkül vorstellen. Sei dazu Γ eine Menge („Menge“ ist hier im naiven Sinn zu verstehen) von Formeln. Durch die Schreibweise $\Gamma \vdash \phi$ wird die Aussage „ϕ ist im Prädikatenkalkül formal aus Γ herleitbar“ abgekürzt. Die Axiome des Prädikatenkalküls lassen sich in mehrere Gruppen unterteilen. Als erstes kommen rein aussagenlogische Axiome, die nur die Junktoren $\Longrightarrow$ und $\neg$ benötigen. Diese reichen ja bekanntlich auch aus, um einen Kalkül der

Aussagenlogik aufzustellen, da sich die anderen Junktoren auf $\neg$ und $\Longrightarrow$ zurückführen lassen. Die folgenden Axiome, zusammen mit der Schlußregel Modus Ponens, sind auch bereits ein derartiger Kalkül. Die griechischen Buchstaben sind natürlich als Metavariablen für Formeln des Prädikatenkalküls zu verstehen, so daß es sich bei den Axiomen genaugenommen um Axiomenschemata handelt. Die ersten Axiome lauten nun:

Ax1: $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \phi)$

Ax2: $\Gamma \vdash (\phi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \chi)) \Longrightarrow ((\phi \Longrightarrow \psi) \Longrightarrow (\phi \Longrightarrow \chi))$

Ax3: $\Gamma \vdash (\neg\psi \Longrightarrow \neg\phi) \Longrightarrow ((\neg\psi \Longrightarrow \phi) \Longrightarrow \psi)$

Die nächsten Axiome sind gewissermaßen die Definitionen der restlichen Junktoren $\vee$, $\wedge$ und $\Longleftrightarrow$:

$\vee$–Ax: $\Gamma \vdash (\phi \vee \psi) \Longrightarrow (\neg\phi \Longrightarrow \psi)$
$\Gamma \vdash (\neg\phi \Longrightarrow \psi) \Longrightarrow (\phi \vee \psi)$

$\wedge$–Ax: $\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi) \Longrightarrow \neg(\phi \Longrightarrow \neg\psi)$
$\Gamma \vdash \neg(\phi \Longrightarrow \neg\psi) \Longrightarrow (\phi \wedge \psi)$

$\Leftrightarrow$–Ax: $\Gamma \vdash (\phi \Longleftrightarrow \psi) \Longrightarrow ((\phi \Longrightarrow \psi) \wedge (\psi \Longrightarrow \phi))$
$\Gamma \vdash ((\phi \Longrightarrow \psi) \wedge (\psi \Longrightarrow \phi)) \Longrightarrow (\phi \Longleftrightarrow \psi)$

Als nächstes folgen die Axiome, die den Umgang mit den Quantoren regeln. Dabei sind eigentlich nur Axiome nötig, die den $\exists$-Quantor betreffen, da sich der $\forall$-Quantor auf den $\exists$-Quantor zurückführen läßt. Die Axiome sind dementsprechend abgefaßt.

$\exists$–Ax1: Kommt v_k in ϕ nicht vor, so gelte $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow \exists v_k \phi\binom{v_i}{v_k}$.

$\exists$–Ax2: Ist t ein variablenfreier Term, so gelte $\Gamma \vdash \phi\binom{v_i}{t} \Longrightarrow \exists v_i \phi$.

$\exists$–Ax3: $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow \exists v_i \phi$

$\forall$–Ax: $\Gamma \vdash \forall x_i \phi \Longleftrightarrow \neg\exists x_i \neg\phi$

Da ich hier einen Prädikatenkälkül mit Gleichheit betrachten will, sind auch Axiome nötig, die die Gleichheitsrelation betreffen.

=–Ax1: $\Gamma \vdash v_i = v_i$

=–Ax2: $\Gamma \vdash v_i = v_j \Rightarrow v_j = v_i$

=–Ax3: $\Gamma \vdash v_i = v_j \Rightarrow v_j = v_k \Rightarrow v_i = v_k$

=–Ax4: Ist F_k^n ein n-stelliges Funktionssymbol für ein $k \in \omega$, so gelte
$\Gamma \vdash v_{i_1} = v_{j_1} \Rightarrow v_{i_2} = v_{j_2} \Rightarrow \ldots v_{i_n} = v_{j_n} \Rightarrow F_k^n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = F_k^n(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$.

=–Ax5: Ist P_k^n ein n-stelliges Prädikatensymbol für ein $k \in \omega$, so gelte
$\Gamma \vdash v_{i_1} = v_{j_1} \Rightarrow v_{i_2} = v_{j_2} \Rightarrow \ldots v_{i_n} = v_{j_n} \Rightarrow P_k^n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \Rightarrow P_k^n(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$.

Das letzte Axiom ist das sogenannte nichtlogische Axiom.

Ax4 Gilt $\phi \in \Gamma$, so gelte $\Gamma \vdash \phi$.

Zu guter Letzt muß ich natürlich noch Regeln angeben, wie man aus bereits hergeleiteten Formeln neue gewinnt, also sogenannte *Schlußregeln.* Es werden hier zwei Schlußregeln benötigt, und zwar der klassische klassische *Modus Ponens* sowie eine Regel zur Einführung des $\exists$-Quantors.

MP (Modus Ponens): Gilt $\Gamma \vdash \phi$ und $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow \psi$, so gelte auch $\Gamma \vdash \psi$.

$\exists$–Regel: Kommt v_i nicht frei in ψ vor und gilt $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow \psi$, so gelte $\Gamma \vdash \exists v_i \phi \Longrightarrow \psi$.

Ein Beweis bzw. eine Herleitung einer Formel χ aus eine Formelmenge Γ ist nun eine Folge von Zeilen der Form $\Gamma \vdash \psi$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Jede Zeile der Folge ist ein Axiom der Form $\Gamma \vdash \phi$, oder sie entsteht aus zwei früheren Zeilen durch Anwendung des Modus Ponens, oder sie entsteht aus einer früheren Zeile durch Anwendung der $\exists$–Regel, und

(ii) die letzte Zeile der Folge ist gerade $\Gamma \vdash \chi$.

Ein Widerspruchsbeweis ist der Beweis eines Widerspruches, d. h. eines Satzes der Form $\phi \wedge \neg\phi$. Eine Theorie ist eine Menge von Formeln. Sie heißt widerspruchsfrei oder konsistent, wenn aus ihr kein Widerspruch hergeleitet werden kann, andernfalls heißt sie widerspruchsvoll.

Ich möchte noch zwei elementare, aber trotzdem wichtige Resultate der Logik anführen. Das erste Resultat habe ich bereits erwähnt:

> *Sei ϕ ein Satz und Γ eine Theorie. Dann ist $\Gamma \cup \{\phi\}$ genau dann widerspruchsvoll, wenn $\Gamma \vdash \neg\phi$ gilt.*

Das zweite Resultat ist das *Deduktionstheorem*:

> *Sei ϕ ein Satz und Γ eine Theorie. Dann gilt $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow \psi$ gilt.*

Ich möchte noch einmal betonen, daß diese Darstellung eines Prädikatenkalküls sowohl noch reichlich unpräzise (um das Wort „geschlampt“ zu vermeiden) als auch viel zu knapp ist. Ich werde in dieser Diplomarbeit auch nur in einem einzigen Beweis auf diesen Kalkül eingehen, und dieser Beweis würde genauso gut mit jedem anderen Kalkül funktionieren.

1.2 Die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre

> *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseren Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.*
>
> Georg Cantor

Dieses wohlbekannte Zitat ist einer der ersten Anfänge der modernen Mengenlehre. Wenn man versucht, es in die formale Sprache der Prädikatenlogik zu übersetzen, so erhält man das von Frege formulierte Komprehensionsaxiom (das eigentlich ein Axiomenschema ist):

> Komprehensionsaxiom: Ist $\phi(x)$ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt, so gilt $\exists y \forall x (x \in y \Longleftrightarrow \phi(x))$.

Nun weiß man durch die Russellsche Antinomie, daß dieses allgemeine Axiom und damit die naive Cantorsche Auffassung von Mengen in dieser Allgemeinheit nicht haltbar ist. Russell betrachtete für $\phi(x)$ die Formel $x \notin x$ und bewies 1903:

$$\neg \exists y \forall x (x \in y \Longleftrightarrow x \notin x)$$

(dabei ist $\in$ ein zweistelliges Prädikatensymbol). Man beachte, daß zum Beweis dieser Aussage keinerlei Axiome der Mengenlehre erforderlich sind. Der Widerspruch, der durch das Komprehensionsaxiom entsteht, ist rein logischer Natur.

Vor allem diese Antinomie führte dazu, daß die Mengenlehre formalisiert und axiomatisiert wurde, wobei das Komprehensionsaxiom durch diverse schwächere Axiome ersetzt wurde. Den Hauptteil dieser Axiomatisierung haben Zermelo und Fraenkel geleistet, so daß das entstandene Axiomensystem allgemein als die Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre. kurz ZF, bezeichnet wird (man sollte aber nicht vergessen, daß z. B. auch Skolem nicht unwesentlich zu dessen Entwicklung beigetragen hat). Der Prädikatenkalkül, in dem ZF nun axiomatisiert wird, enthält kein Funktionszeichen und nur ein einziges zweistelliges Prädikat, das mit $\in$ bezeichnet wird. Dies ist ein nicht zu unterschätzender Vorteil bei einem Konsistenzbeweis, wenn Aussagen *über* die Mengenlehre bewiesen werden sollen. Doch in der Mengenlehre selbst wird man sehr schnell an Grenzen stoßen, weil komplexere Aussagen im Prädikatenkalkül sehr schnell sehr unübersichtlich werden. Der Mathematiker behilft sich in solchen Fällen normalerweise mit *Definitionen*, mit denen weitere Symbole eingeführt werden. In der Mengenlehre sind das z. B. $\emptyset$, ω, ω_1, $\bigcup$, $\bigcap$, $\subseteq$. Die Handhabung solcher Definitionen wird vor allem durch *Klassen* und *Klassenterme* bewerkstelligt und kann sowohl in einer eher intuitiven als auch in einer recht präzisen Art und Weise geschehen. Es werden beide Wege recht ausführlich in dem Werk [Lévy79] von Lévy beschrieben, dem ich auch den größten Teil dieses Abschnittes entnommen habe, aber ich möchte mich hier nur auf den intuitiven Weg beschränken. Es zeigt sich dabei auch, daß die Klassen dem ursprünglichen Verständnis von Cantor sehr viel mehr entsprechen als die eigentlichen Mengen, da die Klassen diejenigen Zusammenfassungen von Mengen sind, die durch eine Formel beschrieben werden. Trotzdem lassen sich alle Aussagen, in denen Klassen auftauchen, auch ohne sie formulieren (wenn das dann normalerweise auch sehr unübersichtlich sein wird).

Ist nun eine Formel $\phi(x)$ gegeben, so beschreibt diese Formel, naiv gesehen, die Klasse derjenigen Mengen x, für die diese Formel gültig ist. Um diese naive Anschauung zu präzisieren, werden zunächst Klassenterme eingeführt. Ist ϕ eine Formel und x eine Variable, so ist $\{x \mid \phi(x)\}$ (d. h. die Zeichenreihe, die aus dem Symbol $\{$, dem Variablensymbol x, dem Symbol $|$, der Zeichenkette ϕ und dem Symbol $\}$ besteht) ein Klassenterm. Die Schreibweise $\phi(x)$ statt ϕ soll dabei weder bedeuten, daß x in ϕ tatsächlich frei vorkommen muß, noch, daß es außer x keine weiteren freien Variablen gibt. Sie soll nur suggerieren, daß x sozusagen die „interessante“ Variable ist. Weitere freie Variablen werden als Parameter bezeichnet. Man möchte nun Klassen ähnlich wie

Mengen behandeln können, d. h. man möchte in Formeln statt Variablen, die ja für Mengen stehen, jetzt auch Klassenterme zulassen. Derartig erweiterte Formeln sollen aber dann rückübersetzt werden können in die eigentliche, primitive Sprache von ZF. Es gibt nur zwei Relationen in ZF, nämlich die Elementbeziehung $\in$ und die Gleichheitsrelation $=$. Folglich muß man sich nur Gedanken machen, wie erweiterte Formeln, die dadurch entstehen, daß man in einer der beiden (einzigen) atomaren Formeln $x \in y$ und $x = y$ eine oder beide der Variablen x und y (oder beide) durch einen Klassenterm ersetzt, zu verstehen sind. Zu jeder dieser erweiterten Formeln ist also eine Übersetzung in die primitive Sprache von ZF gesucht.

Der Klassenterm $\{y \,|\, \phi(y)\}$ wird naiv interpretiert als die Klasse aller Mengen y, für die $\phi(y)$ gültig ist. Die Übersetzung der Formel $x \in \{y \,|\, \phi(y)\}$ wird aus diesem Grund als $\phi\binom{y}{x}$ festgelegt (im folgenden werde ich für Ausdrücke wie $\phi\binom{y}{x}$ auch einfach $\phi(x)$ schreiben). Ähnlich wie bei Mengen sieht man zwei Klassen dann als gleich an, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Den Ausdruck $\{x \,|\, \phi(x)\} = \{y \,|\, \psi(y)\}$ übersetzt man deswegen nach $\forall z(\phi(z) \iff \psi(z))$. Analog übersetzt man die Ausdrücke $x = \{y \,|\, \phi(y)\}$ sowie $\{y \,|\, \phi(y)\} = x$ nach $\forall z(z \in x \iff \phi(z))$ beziehungsweise $\forall z(\phi(z) \iff z \in x)$. Schwieriger zu interpretieren ist $\{x \,|\, \phi(x)\} \in \{y \,|\, \psi(y)\}$. Es wird eine Klasse als eine Zusammenfassung von Mengen verstanden. Wenn man also sagen will, daß eine Klasse Element einer anderen ist, heißt das, daß die erste Klasse sogar eine Menge ist, die in der zweiten liegt. Deswegen wird der obige Ausdrucks als $\exists z(z = \{x \,|\, \phi(x)\} \wedge z \in \{y \,|\, \psi(y)\})$ übersetzt (man beachte, daß die Klassenterme, die in dieser Formel noch auftauchen, nach den schon vorher erwähnten Regeln auch eleminiert werden können). Analog soll $\{x \,|\, \phi(x)\} \in y$ nun $\exists z(z = \{x \,|\, \phi(x)\} \wedge z \in y)$ bedeuten. Damit können jetzt alle atomaren Formeln der erweiterten Sprache in Formeln der primitven Sprache von ZF rückübersetzt werden. Durch die Festlegung der Übersetzungsregeln und durch das Zulassen von Parametern kann nun auch insbesondere jede Menge y als die Klasse $\{x \,|\, x \in y\}$ angesehen werden. Es werden weiterhin häufig Klassenterme A in Formeln mit sogenannten <u>beschränkten Quantoren</u> benutzt. Beschränkte Quantoren sind Quantoren der Form $(\exists x \in A)$ oder $(\forall x \in A)$. Auch dies ist nur eine abkürzende Schreibweise: Die Formel $(\exists x \in A)\phi(x)$ ist die Abkürzung von $\exists x(x \in A \wedge \phi(x))$, und $(\forall x \in A)\phi(x)$ ist die Abkürzung für $\forall x(x \in A \Longrightarrow \phi(x))$.

Die primitive Sprache von ZF wird durch die Einführung von Klassentermen erweitert. Die Sprache, die so entsteht, wird als <u>erweiterte Sprache</u> bezeichnet. Man hat damit nun auch die Möglichkeit, daß die in einem Klassenterm $\{x \,|\, \Phi(x)\}$ vorkommende Formel $\Phi(x)$ wiederum Klassenterme enthält. Man beachte, daß auch durch diese Erweiterung des Klassentermbegriffes de facto keine wirklich neuen Klassenterme eingeführt werden: Da eine Formel $\Phi(x)$, die auch Klassenterme enthalten kann, in eine Formel $\phi(x)$ der primitiven Sprache von ZF übersetzt werden kann, entspricht der Klassenterm $\{x \,|\, \Phi(x)\}$, der in der erweiterten Sprache gebildet wurde, dem Klassenterm $\{x \,|\, \phi(x)\}$, der in der primitiven Sprache gebildet wird. Insgesamt kann man, wie auch nicht anders zu erwarten war, in der erweiterten Sprache nicht mehr Dinge formulieren als in der primitiven. Ein wirklicher Gewinn an Lesbarkeit wird aber erst dann erzielt, wenn man parameterfreie Klassen mit neuen Symbolen kennzeichnet, wie z. B. $\emptyset$, 1, 2, ω, ω_1 oder die echten Klassen On (die Klasse aller Ordinalzahlen) und V (die Klasse aller Mengen). Auch

Sprachen mit derartigen neuen Symbolen werden als erweiterte Sprache bezeichnet.

Nachdem man nun Klassenterme eingeführt hat, kann man auch Klassenvariablen einführen, die für Klassenterme stehen. Diese Einführung kann man naiv handhaben oder auch formal präzise, indem man einen zweiwertigen Prädikatenkalkül mit verschiedenen Variablen für Mengen und Klassen betrachtet, wobei man noch einige Axiome und Schlußregeln angeben muß, die die Beziehungen zwischen Mengen und Klassen reflektieren. Ich möchte hier aber nur den naiven Weg beschreiten. Es seien große römische Buchstaben $A, B, C, \ldots$ Klassenvariablen, die für beliebige Klassenterme stehen können. So kann man jetzt z. B. eine Aussage wie $A = B \Longrightarrow B = A$ formulieren. Wie ist das zu verstehen? Wenn die Variablen A und B für die Klassenterme $\{x \,|\, \Phi(x)\}$ bzw. $\{y \,|\, \Psi(y)\}$ stehen, so steht der Ausdruck $A = B \Longrightarrow B = A$ für $\{x \,|\, \Phi(x)\} = \{y \,|\, \Psi(y)\} \Longrightarrow \{x \,|\, \Psi(x)\} = \{y \,|\, \Phi(y)\}$. Dieses ist nun wiederum eine Abkürzung für $\forall z(\Phi(z) \Longleftrightarrow \Psi(z)) \Longrightarrow \forall z(\Psi(z) \Longleftrightarrow \Phi(z))$. Sind nun $\phi(z)$ und $\psi(z)$ Formeln der primitiven Sprache, die zu $\Phi(z)$ bzw. $\Psi(z)$ äquivalent sind, so ist letzte Konklusion äquivalent zu $\forall z(\phi(z) \Longleftrightarrow \psi(z)) \Longrightarrow \forall z(\psi(z) \Longleftrightarrow \phi(z))$, was ein (logisch korrekter) Ausdruck der primitiven Sprache ist. Durch die Einführung von Klassenvariablen hat man also die Möglichkeit, Formelschemata der primitiven Sprache durch eine einzige Formel der erweiterten Sprache auszudrücken.

Klassenvariablen dürfen nur als freie Variablen auftauchen, d. h. es sind Quantifizierungen der Form $\exists A$ oder $\forall A$ verboten. Wenn man dies zulassen würde, würde man die Ausdrucksmöglichkeiten der erweiterten Sprache echt vergrößern. Ein Ausdruck der Form $A = B \Longrightarrow B = A$ kann man aber trotzdem als „für alle Klassen A und B folgt $B = A$ aus $A = B$“ lesen.

Ähnlich wie man nun Klassenvariablen eingeführt hat, kann man auch neue Funktions- und Relationssymbole einführen. Dies ist ein Vorgehen, das wohl jedem Mathematiker vertraut ist und auch unbedingt nötig ist, um komplexere Formeln lesbar zu halten. Neue Relations- und Funktionssymbole wird man ebenso wie die Klassenterme auch immer wieder eliminieren können, und ebenso, wie man in Klassenterme wiederum Klassenterme einsetzen durfte, wird man in neue Funktionen und Relationen auch Klassen einsetzen dürfen (z. B. ist die noch zu definierende Relation $\subseteq$ natürlich auch für Klassen sinnvoll). Ich werde noch einmal in Kapitel 7 auf die Einführung neuer Symbole eingehen, wobei dort die Argumente von Funktionen und Relationen aber nur Mengen sein dürfen. An dieser Stelle möchte ich aber die etwas allgemeinere Möglichkeit behandeln, bei der auch Klassen Argumente sein dürfen.

Ein neues n-stelliges Relationssymbol R wird durch eine Formel $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ mittels des Ausdruckes

$$R(X_1, \ldots, X_n) \Longleftrightarrow \Phi(X_1, \ldots, X_n)\,,$$

den man am besten als ein weiteres Axiom auffasst, definiert. Dabei sei Φ eine Formel der erweiterten Sprache mit den einzigen freien Variablen $X_1, \ldots, X_n$, die sowohl für Mengen- als auch für Klassenvariablen stehen dürfen. Die Formel Φ darf weiterhin bereits definierte Funktions- und Relationssymbole enthalten. Auf diese Weise wird

z. B. das neue Symbol $\subseteq$ definiert:

$$X_1 \subseteq X_2 \Longrightarrow \forall x(x \in X_1 \Longleftrightarrow x \in x_2)$$

(man müßte zwar eigentlich $\subseteq(X_1, X_2)$ schreiben, doch wie ich bereits gesagt habe, wird im allgemeinen die Form $X_1 \subseteq X_2$ bevorzugt). Taucht in einer Formel nun z. B. der Ausdruck $y \subseteq z$ auf, so ist er durch $\forall x(x \in y \Longrightarrow x \in z)$ zu ersetzen.

Ähnlich wie Relationen kann man n-stellige Funktionen definieren, die jedem n-Tupel von Klassen (und damit insbesondere jedem n-Tupel von Mengen) eine bestimmte Menge zuordnen. Ist dazu $\Phi(X_1, \ldots, X_n, y)$ eine Formel der erweiterten Sprache, wobei y eine Mengenvariable ist, und kann man für beliebige Klassenterme $X_1, \ldots, X_n$

$$\exists! y \Phi(X_1, \ldots, X_n, y)$$

beweisen ($\exists! y$ ist als „es existiert genau ein y“ zu lesen), so kann man die Funktion F durch

$$\Phi(X_1, \ldots, X_n, F(X_1, \ldots, X_n))$$

definieren. Wiederum seien dabei $X_1, \ldots, X_n, y$ die einzigen freien Variablen von Φ, und $X_1, \ldots, X_n$ können sowohl für Mengen- als auch für Klassenvariablen stehen. Normalerweise werden aber wohl Funktionen betrachtet, die nur auf allen Mengen agieren. Als Beispiel möchte ich die Nachfolgerfunktion behandeln, die jeder Menge x ihren Nachfolger $s(x) = x \cup \{x\}$ zuordnen soll (eigentlich führe ich das Symbol $\cup$ erst später ein, aber die naive Bedeutung dieser „Definition“ ist wohl jetzt schon klar). Echten Klassen soll die Nachfolgerfunktion s einfach die leere Menge zuordnen. Die Formel $\Phi(X, y)$ lautet dann:

$$\Phi(X, y) \equiv \neg\exists x(x = X \wedge \neg\exists z(z \in y)) \vee \exists x(x = X \wedge \forall z(z \in y \Longleftrightarrow z \in x \vee z = x)) .$$

Taucht also in einer Formel z. B. der Ausdruck $u = s(v)$ auf, so ist er durch $\Phi(v, u)$ zu ersetzen.

Im allgemeinen Fall darf Φ natürlich auch wieder bereits definierte Funktions- und Relationssymbole enthalten. Will man eine Funktion definieren, die auch auf Klassen agiert, so beachte man, daß Klassenvariablen für beliebige Formeln stehen. Damit ist der Ausdruck $\exists! y \Phi(X_1, \ldots, X_n, y)$ in der primitiven Sprache im allgemeinen ein Formel*schema*! Folglich wird zum Nachweis dieses Ausdrucks sogar ein Beweisschema benötigt. Doch dieser Fall wird, wie bereits erwähnt, nur sehr selten auftreten. Es ist hingegen sinnvoll, Funktionen zu betrachten, die echte Klassen als Funktionswerte haben dürfen. Dies klingt zwar allgemeiner, doch in diesem Fall ist nicht der Nachweis zu führen, daß die Funktionswerte tatsächlich Mengen sind, so daß die Handhabung derartiger Funktionen einfacher ist. Tatsächlich ist eine derartige Funktion letztendlich nichts anderes als eine Abkürzung für einen Klassenterm: Man kann den Klassenterm $\{y \mid \Phi(X_1, \ldots, X_n, y)\}$ auch als $F(X_1, \ldots, X_n)$ schreiben, wie es z. B. bei der folgenden Definition der Potenzklasse $\mathfrak{P}(A)$ geschieht. Ich hoffe, daß der Gebrauch dieser Dinge bei den folgenden Definitionen erwas durchsichtiger wird.

Definition 1.5 (i) $\emptyset = \{x \mid \neg(x = x)\}$, $V = \{x \mid x = x\}$

(ii) $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(iii) $A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$,
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, $\bigcup A = \{x \mid (\exists u \in A)(x \in u)\}$,
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, $\bigcap A = \{x \mid (\forall u \in A)(x \in u)\}$ (also $\bigcap \emptyset = V$),
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(iv) $\mathrm{Vb}(A) = \{x \mid \exists y((x, y) \in A)\}$, $\mathrm{Nb}(A) = \{y \mid \exists x((x, y) \in A)\}$
$F|A = \{x \mid \exists y \exists z(x = (y, z) \wedge x \in F \wedge y \in A)\}$
$F[A] = \mathrm{Nb}(F|A)$, $F(x) = \bigcup F[\{x\}]$
$A \circ B = \{w \mid \exists x \exists y \exists z(w = (x, z) \wedge (x, y) \in B \wedge (y, z) \in A)\}$

(v) $\mathrm{Mg}(A) \iff \exists x(x = A)$, d. h. „$A$ ist eine Menge“,
$\mathrm{Rel}(A) \iff (\forall x \in A)\exists y \exists z(x = (y, z))$, d. h. „$A$ ist eine Relation“
$\mathrm{Fkt}(A) \iff \mathrm{Rel}(A) \wedge \forall x \forall y((\exists z\, (z, x) \in A \wedge (z, y) \in A) \Longrightarrow x = y)$,
d. h. „A ist eine Funktion“

(vi) $\mathfrak{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

(vii) A ist fundiert $\iff (\forall x \subseteq A)(x = \emptyset \vee (\exists y \in x)(y \cap A = \emptyset))$,
A ist transitiv $\iff \forall x(x \in A \Longrightarrow x \subseteq A)$,
$\mathrm{On} = \{x \mid x$ ist fundiert und transitiv und jedes $y \in x$ ist transitiv$\}$

(viii) $\omega = \bigcap\{x \mid \emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)\}$
x ist endlich $\iff (\exists n \in \omega)\exists f(\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{Vb}(f) = n \wedge \mathrm{Nb}(f) = x)$
$x \subset\subset y \iff x \subseteq y \wedge x$ ist endlich

(ix) f ist eine endliche Folge $\iff \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{Vb}(f) \in \omega$
f ist eine m-Folge $\iff f$ ist eine endliche Folge $\wedge\, \mathrm{Vb}(f) = m$
Ist f eine m-Folge und g eine n-Folge, so sei $f\hat{\ }g$ die $(m+n)$-Folge h mit $h(i) = f(i)$ für jedes $i \in m$ und $h(m + i) = g(i)$ für jedes $i \in n$

(x) R sei die Funktion auf On mit $R_\alpha = R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{P}(R(\beta))$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$. R wird als von Neumannsche Hierarchie bezeichnet. Für jedes $x \in \mathrm{Nb}(R)$ sei dann $\rho(x) = \min\{\alpha \mid x \subseteq R(\alpha)\}$ der (von Neumannsche) Rang von x.

Es ist bei der Definition der von Neumannschen Hierarchie R sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit von R zu beweisen. Dies ist mit der sogenannten Methode der transfiniten Induktion (eine Art Fortsetzung der vollständigen Induktion auf die Klasse On der Ordinalzahlen) möglich, doch darauf möchte ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen.

Ich möchte noch ein kleines Beispiel geben, wie diese Definitionen nun rückzuübersetzen sind. Das neue zweistellige Prädikat $\subseteq$ wurde für Mengen durch

$$y \subseteq x \iff \forall z(z \in y \Longrightarrow z \in x)$$

definiert, das neue einstellige Funktionssymbol $\mathfrak{P}$ durch

$$\mathfrak{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\} .$$

(Es werden hier zwar andere Variablen als in der Definition benutzt, aber das sollte dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten. Man könnte allerdings die Definitionen noch präziser fassen, indem man noch auf die Variablen eingeht, die man bei den Definitionen benutzen darf.) Beide Symbole stehen stellvertretend für bestimmte Klassen, nämlich eine Relation und eine Funktion. Die Formel $u = \mathfrak{P}(v)$ wird nun wie folgt rückübersetzt:

$u = \mathfrak{P}(v)$	entspricht	$\forall x(x \in u \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{P}(v))$,
	das entspricht	$\forall x(x \in u \Longleftrightarrow x \subseteq v)$
	und das entspricht	$\forall x(x \in u \Longleftrightarrow \forall y(y \in x \Longrightarrow y \in v))$.

Es ist nun an der Zeit, die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre vorzustellen. Ich möchte die Axiome erstmal in genau der Form anführen, wie ich sie später in dieser Arbeit benötige (d. h. die Axiome sind der Arbeit [HaLé71] von Halpern und Lévy entnommen). Bis auf das Unendlichkeitsaxiom sind alle Axiome in der primitiven Sprache von ZF, also ohne Zuhilfenahme von den eben definierten Relationen oder Funktionen formuliert. Selbstverständlich ginge dies auch beim Unendlichkeitsaxiom, doch dann wäre es etwas unleserlich.

Die Axiome von ZF:

(i) Extensionalitätsaxiom
$\forall x \forall y(x = y \iff \forall z(z \in x \iff z \in y))$

(ii) Aussonderungsaxiom (Schema)
Sei $\Psi(z)$ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt. Dann gelte
$\forall x \exists y \forall z(z \in y \Longleftrightarrow z \in x \wedge \Psi(z))$

(iii) Vereinigungsmengenaxiom
$\forall x \exists y \forall z \forall t(t \in z \wedge z \in x \Longrightarrow t \in y)$

(iv) Potenzmengenaxiom
$\forall x \exists y \forall z(\forall t(t \in z \Longrightarrow t \in x) \Longrightarrow z \in y)$

(v) Ersetzungsaxiom (Schema)
Sei $\Psi(z, t)$ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt. Dann gelte
$\forall x \exists y \forall z[z \in x \Longrightarrow (\exists t \Psi(z, t) \Longleftrightarrow \exists t'(t' \in y \wedge \Psi(z, t')))]$,

(vi) Fundierungsaxiom (Schema)
$\exists y \Psi(y) \Longrightarrow \exists y(\Psi(y) \wedge \neg \exists z(\Psi(z) \wedge z \in y))$

(vii) Unendlichkeitsaxiom
$\exists x((\exists y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \wedge (\forall z \in x)(\exists t \in x)(z \neq \emptyset \Rightarrow z = t \cup \{t\}))$

Es besteht nun die Möglichkeit, mit Hilfe der oben definierten Funktionen und Relationen das Axiomensystem neu und intuitiv einleuchtender zu formulieren. So möchte man z. B. das Potenzmengenaxiom als „zu jeder Menge existiert die Potenzmenge“ oder sogar als „bei jeder Menge ist die Potenzklasse tatsächlich eine Menge“ lesen. Doch in ZF wird der Begriff *Menge* gar nicht definiert, denn ZF ist erst einmal nichts anderes als ein Axiomensystem. Doch man hat die Intuition, daß es so etwas wie ein „Modell“ für dieses Axiomensystem gibt, und die Objekte dieses Modelles nennt man dann *Mengen*. Mit der Einführung von Klassen eröffnet sich jedoch eine neue Sichtweise, insbesondere sind die Begriffe *Menge* und *Klasse* wohlunterschieden, und man kann mit dem intuitiv besser greifbaren Begriff *Klasse* (ich habe ja bereits erwähnt, daß Klassen dem ursprünglichen Mengenbegriff näher kommen als die „richtigen“ Mengen) nun das Prädikat *Menge* einführen (siehe Definition 1.5). Mit diesem Prädikat kann man nun ein neues Axiomensystem, das natürlich zum alten äquivalent ist, aufstellen (siehe dazu z. B. [Monk69]). Doch auch wenn dieses Axiomensystem vielleicht einleuchtender und natürlicher aussieht als das alte, so darf man nicht vergessen, daß es letztendlich aus dem alten nur durch Einführung abkürzender Schreibweisen entstanden ist. (Es ist aber das Ersetzungsaxiom in dieser neuen Form etwas schwächer als vorher, so daß man hier noch das Paarmengenaxiom den Axiomen hinzufügen muß.)

(i) Extensionalitätsaxiom
$\forall x \forall y (x = y \iff \forall z (z \in x \iff z \in y))$

(ii) Aussonderungsaxiom (Schema) In Ψ komme y nicht frei vor. Dann gelte
$\forall x\, Mg(\{y \,|\, y \in x \wedge \Psi\})$

(iii) Vereinigungsmengenaxiom
$\forall x\, \mathrm{Mg}(\bigcup x)$

(iv) Potenzmengenaxiom
$\forall x\, \mathrm{Mg}(\mathfrak{P}(x))$

(v) Ersetzungsaxiom (Schema)
$(\mathrm{Fkt}(A) \wedge \mathrm{Mg}(\mathrm{Vb}(A))) \Longrightarrow \mathrm{Mg}(\mathrm{Nb}(A))$

(vi) Fundierungsaxiom (Schema)
$A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists y (y \in A \wedge y \cap A = \emptyset)$

(vii) Unendlichkeitsaxiom
$\exists x ((\exists y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \wedge (\forall z \in x)(\exists t \in x)(z \neq \emptyset \Rightarrow z = t \cup \{t\}))$

(viii) Paarmengenaxiom
$\forall x \forall y\, \mathrm{Mg}(\{x, y\})$

Mit den definierten Prädikaten läßt sich auch das Auswahlaxiom relativ leicht formulieren:

Auswahlaxiom (AC): $(\mathrm{Fkt}(f) \wedge (\forall x \in \mathrm{Nb}(f))(x \neq \emptyset)) \Longrightarrow$
$\exists g (\mathrm{Fkt}(g) \wedge \mathrm{Vb}(g) = \mathrm{Vb}(f) \wedge (\forall x \in \mathrm{Vb}(g))(g(x) \in f(x)))$

Ich möchte noch kurz erwähnen, daß das Fundierungsaxiom unter den Axiomen von

ZF eine kleine Sonderrolle einnimmt. Es ist ein Axiom, das der „normale“ Mathematiker normalerweise nie benötigen wird, obwohl es eigentlich die naive Anschauung von Mengen recht gut widerspiegelt, da es Anomalien wie z. B. $x \in x$ (vergleiche dazu die Russellsche Antinomie!) verhindert. Für den in der Mengenlehre tätigen Mathematiker ist es jedoch sehr nützlich, da es eine Art Induktion über den Aufbau von Mengen ermöglicht. Das Fundierungsaxiom gilt nämlich bekannterweise genau dann, wenn $\mathrm{Nb}(R) = V$ gilt. Weiterhin ist der Nachweis der Gültigkeit des Fundierungsaxioms auch ein wesentliches Problem in dem Beweis, daß bzgl. ZF der Boolesche Primidealsatz schwächer als das Auswahlaxiom ist. Ich möchte mit ZF_0 nun die schwächere Theorie ZF ohne Fundierungsaxiom (d. h. die Axiome (i)–(v) und (vii) der ersten Auflistung der Axiome) bezeichnen. Die Aussage, daß bzgl. ZF_0 der Boolesche Primidealsatz schwächer als das Auswahlaxiom ist, wurde von Halpern bereits 1964 bewiesen (siehe [Halp64]). Die grundlegende Idee war dabei, daß man viele Unabhängigkeitsresultate bzgl. ZF_0 auf ältere Resultate zurückführen kann, die auf einer von Mostowski entwickelten Methode für Unabhängigkeitsbeweise mit sogenannten *Urelementen* oder *Atomen* basieren. Darauf möchte ich hier allerdings nicht weiter eingehen.

1.3 Der Konsistenzbeweis von ZF+BPI+¬AC

Fast die gesamte Diplomarbeit besteht aus dem Beweis, daß in ZF der Boolesche Primidealsatz BPI schwächer ist als das Auswahlaxiom AC. Ich möchte hier einen Überblick über den Aufbau dieses Beweises geben. Nach einem Resultat von Gödel gilt für jedes hinreichend starke Axiomensystem, daß man die Konsistenz dieses Axiomenssystems innerhalb des Axiomensystemes selber nicht beweisen kann. Dies trifft insbesondere auf jedes Axiomensystem zu, das ZF beinhaltet. Man wird also nicht erwarten können, daß man mit den üblichen Mitteln der Logik und Mengenlehre die Konsistenz von ZF oder gar von ZF+BPI+¬AC beweisen kann. Stattdessen wird ein *relativer* Konsistenzbeweis geführt: Man nimmt einfach an, daß ZF konsistent ist, und beweist unter dieser (unbeweisbaren) Voraussetzung die Konsistenz von ZF+BPI+¬AC. Oder, um es noch präziser auszudrücken: Es wird auf konstruktive Art und Weise, mittels sogenannter finitistischer Methoden, jedem Widerspruchsbeweis in ZF+BPI+¬AC ein Widerspruchsbeweis in ZF zugeordnet. Ich werde dieses Vorgehen der Einfachheit halber einen Konsistenzbeweis nennen, auch wenn es sich genaugenommen um keinen solchen handelt.

Der Konsistenzbeweis von ZF+BPI+¬AC gliedert sich ganz grob in zwei Teile: Im ersten Teil wird ein Axiomensystem, genannt SP, eingeführt, das insbesondere alle Axiome von ZF beinhaltet. In diesem Axiomensystem werden dann der Boolesche Primidealsatz BPI und eine spezielle Negation des Auswahlaxioms bewiesen. Im zweiten Teil beweist man innerhalb von ZF, daß das Axiomensystem SP konsistent ist.

Der erste Teil des Beweises wird von den Kapiteln 3 und 4 eingenommen. Dabei wird das Axiomensystem SP zwar erst in Kapitel 4 eingeführt, aber es wird bereits in Kapitel 3 in diesem Axiomensystem gearbeitet. Um das durchführen zu können, muß man wissen, daß es in der formalen Sprache von SP neben dem $\in$-Symbol noch ein Konstantensymbol

b und zwei einstellige Prädikatensymbole S und F gibt. Die in SP gebildete Klasse $\{x \mid S(x)\}$ wird als die Klasse der Standardmengen bezeichnet. Eine Menge x ist also genau dann eine Standardmenge, wenn $S(x)$ in SP herleitbar ist. Wie man sieht, führen einstellige Prädikatensymbole auf kanonische Art und Weise zu Klassen und werden häufig deswegen auch mit ihnen identifiziert. Die Sprechweise „s ist aus S“ ist also als “s ist aus der Klasse $\{x \mid S(x)\}$“ zu interpretieren. Für die besondere Menge b sind in der Theorie SP die Formeln $b \subseteq \mathfrak{P}(\omega)$ und $\neg S(b)$ herleitbar (b ist also eine „Nichtstandardmenge“). In Kapitel 3 wird nun ein Weg beschrieben, wie man aus den Standardmengen und der Menge b eine ganze Hierarchie, die sogenannte *L-Hierarchie*, von neuen Mengen aufbauen kann. Die Intention dabei ist ungefähr die folgende: Man kann sich vorstellen, daß man ein Modell (und dieser Begriff ist hier vollkommen naiv zu verstehen) von SP erhält, indem man zu einem Modell von ZF eine neue Menge b mit bestimmten Eigenschaften „adjungiert“, ähnlich, wie man z. B. zum Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen die neue ideelle Zahl $\sqrt{2}$ adjungieren kann (um präzise zu sein, ist das Modell von SP ein inneres Modell dieser Adjunktion, ein sogenanntes *symmetrisches Modell*, aber das möchte ich hier nicht weiter ausführen). Die Mengen des alten Modells werden im neuen Modell gerade die Standardmengen sein. Dann möchte man natürlich die Mengen in dieser Adjunktion dadurch erhalten, daß man die durch die Axiome von ZF beschriebenen Möglichkeiten der Bildung von neuen Mengen aus alten (z. B. Potenzmengenbildung) auf die Mengen des alten Modells und auf b anwendet (dies entspricht bei der Körperadjunktion dem Bilden von Termen mit Zahlen aus $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$). Genau dies passiert in Kapitel 3. Es wird dann eine Sprache $\mathcal{L}$ angegeben, die in ZF beschreibbar ist. was bedeutet, daß die Zeichen und Zeichenketten von $\mathcal{L}$ durch Terme in ZF kodiert werden. Diese Art Kodierung wird nach ihrem Erfinder auch „Gödelisierung“ genannt. Mittels der formalen Sprache $\mathcal{L}$ werden dann Terme aus Standardmengen und b aufgebaut. Diese Terme werden dann (in SP) zu Mengen ausgewertet, d. h. innerhalb von SP wird eine Funktion angegeben, die jedem dieser Terme eine Menge zuordnet. Die Terme sind dann sozusagen Namen für die ihnen zugeordneten Mengen aus dem Modell von SP. Eines der Axiome von SP ist nun gerade, daß jede Menge einen Namen in der Sprache $\mathcal{L}$ hat. Da jedes Element aus dem Modell von SP einen in ZF konstruierten Namen hat, ist $\mathcal{L}$ das wesentliche Bindeglied zwischen den Theorien ZF und SP.

Im Kapitel 4 wird dann das Axiomensystem SP explizit vorgestellt. SP beinhaltet sechs (zunächst metasprachlich beschriebene) Axiome, wobei das erste Axiom besagt, daß alle Axiome von ZF auch in SP gelten sollen. Im Axiomensystem SP kann man nun wie üblich Beweise führen. Es werden dann unter anderem folgende Resultate hergeleitet:

(i) der Boolesche Primidealsatz und

(ii) es existiert in den reellen Zahlen eine Dedekind-endliche und dichte Menge (wobei eine Menge *Dedekind-endlich* ist, wenn sie keine abzählbar unendliche Teilmenge enthält).

Damit gilt in SP der Boolesche Primidealsatz und die Negation des abzählbaren Auswahlaxioms. Es ist nun also zu zeigen, daß diese Theorie konsistent ist.

Der Konsistenzbeweis von SP wird nicht absolut, sondern in ZF geführt und nimmt den Rest dieser Arbeit ein. Einfach ausgedrückt, wird in ZF bewiesen, daß alle in SP herleitbaren Sätze (auf eine noch zu definierende Art und Weise) gültig sind. Da der Beweis natürlich nur dann sinnvoll ist, wenn ZF selber konsistent ist, handelt es sich also um einen relativen Konsistenzbeweis. Es wird nun also ab Kapitel 5 nicht mehr in SP, sondern in ZF argumentiert. De facto wird allerdings nicht nur ZF, sondern sogar die stärkere Theorie ZF+„Konstruktibilitätsaxiom“ benutzt. Das Konstruktibilitätsaxiom sagt aus, daß man alle Mengen durch Anwendung von bestimmten Operationen aus den Ordinalzahlen erhält, und impliziert insbesondere die Existenz einer surjektiven Funktion von den Ordinalzahlen auf die Klasse aller Mengen (diese Funktion ist dann natürlich auch eine Klasse) und damit auch das Auswahlaxiom. Gödel bewies 1938 durch die Methode der inneren Modelle, daß das Konstruktibilitätsaxiom konsistent mit ZF ist, womit der erste relative Konsistenzbeweis der Mengenlehre geführt wurde. Durch dieses Resultat können wir hier auch statt ZF sogar ZF+„Konstruktibilitätsaxiom“ betrachten.

Um nun in ZF Aussagen über die Theorie SP zu machen, denke man sich diese Theorie am besten gödelisiert, ähnlich wie es bereits mit der Sprache $\mathcal{L}$ geschehen ist. In ZF wird nun eine feste, vollständige Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ vorgegeben. Sie ist zunächst zwar noch beliebig, wird aber in Kapitel 8 explizit definiert. Dort wird sie in gewisser Weise die Menge b von ZF aus beschreiben. Es wird nun eine Funktion definiert, die erst jeder Formel aus $\mathcal{L}$ und dann jedem Satz aus SP ein Element aus B (der Grundmenge der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$) zuordnet. Diese Funktion ist eine *Bewertung* der Formeln. Man kann sich dabei die Menge B als eine ganze Menge von Wahrheitswerten vorstellen, die zwischen „wahr“, dem größten Element $\top$ von $\mathcal{B}$, und „falsch“, dem kleinsten Element $\bot$ von $\mathcal{B}$, liegen. Eine Formel ist also um so „wahrer“, je größer ihre Bewertung ist, insbesondere kann man Formeln als „wahr“ betrachten, wenn sie die Bewertung $\top$ erhalten. Es liegt der Gedanke nahe, daß bei der Verknüpfung von Formeln durch Junktoren wie $\vee$, $\wedge$ oder $\neg$ die Bewertung der entstehenden Formeln diese Verknüpfung widerspiegeln sollen, und genauso wird es auch gemacht. So erhält z. B. die Formel $\phi \vee \psi$ als Bewertung gerade das Supremum der Bewertungen von ϕ und ψ, und die Formel $\neg\phi$ erhält als Bewertung gerade das Komplement der Bewertung von ϕ. Damit ist die Bewertungsfunktion insbesondere nicht trivial: Es werden z. B. Tautologien offensichtlich immer mit $\top$ und folglich deren Negationen immer mit $\bot$ bewertet.

In Kapitel 5 wird nach der Definition der Bewertungsfunktion noch gezeigt, daß diese Funktion mit dem Prädikatenkalkül verträglich ist. Das bedeutet, daß sämtliche Axiome des Prädikatenkalküls wahr sind, also die Bewertung $\top$ erhalten, und daß auch die Anwendung der Schlußregeln auf wahre Formeln wieder nur wahre Formeln liefert. In den folgenden Kapiteln 6, 7 und 8 wird dann gezeigt, daß auch sämtliche Axiome von SP die Bewertung $\top$ erhalten (es zeigt sich dabei, daß dies für die Axiome (i), (iii), (iv) und (vi) bezüglich beliebiger Boolescher Algebren zutrifft und erst bei den Axiomen (ii) und (v) eine explizite Definition von $\mathcal{B}$ nötig ist). Damit ist die Konsistenz von SP bewiesen: Angenommen, man hätte in SP einen (formalen) Beweis eines Satzes der Form $\phi \wedge \neg\phi$. Der Beweis ist also eine Folge von Formeln, die Axiome aus SP oder Axiome des Prädikatenkalküls sind oder die aus früheren Formeln durch Anwendung einer der beiden Schlußregeln entstehen. Nun haben aber sämtliche Axiome die Bewertung $\top$, und auch Anwendung der Schlußregeln führt von Formeln mit der Bewertung $\top$ wieder nur zu Formeln mit der Bewertung $\top$. Somit kann man in ZF beweisen, daß alle Formeln dieses Beweises, also insbesondere auch der Satz $\phi \wedge \neg\phi$, die Bewertung $\top$ erhalten. Andererseits gilt aufgrund der Definition der Bewertungsfunktion, daß der Satz $\phi \wedge \neg\phi$ die Bewertung $\perp$ erhalten muß. Also kann man in ZF beweisen, daß $\perp = \top$ in der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ gilt. Da man in ZF auch sofort die Nichttrivialität von $\mathcal{B}$ nachweisen kann, erhält man also einen Widerspruch in ZF. Zusammenfassend erhält man aus einem Widerspruchsbeweis in SP also auf konstruktive Art und Weise einen Widerspruchsbeweis in ZF, und genau das war zu zeigen.

Ich möchte noch darauf hinweisen, daß gerade für den Verbandstheoretiker diese Beweismethode meines Erachtens eine äußerst elegante ist. Normalerweise werden bei Forcing-Beweisen z. B. noch sogenannte generische Ultrafilter eingeführt, die in einem Standardmodell der Mengenlehre gar nicht existieren können. Der Forcing-Beweis kann zwar trotzdem durchgeführt werden (dafür gibt es verschiedene Argumente), doch die Forcing-Beweise erhalten dadurch in meinen Augen einen etwas „esoterischen" Anstrich. Auch die Technik bei anderen Forcing-Beweisen ist zwar in einigen Dingen kürzer als in diesem Beweis, aber von den Methoden umfangreicher. Die hier angewandte Methode, einen Konsistenzbeweis im wesentlichen nur durch Berechnungen in einer Booleschen Algebra zu führen, ist dagegen vielleicht auf den ersten Blick etwas unanschaulich, dafür aber (falls man so etwas von einem mathematischen Beweis sagen darf) glaubwürdiger, weil man das sichere Bezugssystem ZF dabei nie verlassen muß. Außerdem halte ich es für durchaus stilvoll, einen Konsistenzbeweis *über* eine verbandstheoretische Aussage *mit* hauptsächlich verbandstheoretischen Methoden zu führen.

Kapitel 2

Äquivalenzen zum Primidealsatz

In diesem Kapitel möchte ich versuchen, einen kleinen Eindruck über die Bandbreite des Primidealsatzes zu vermitteln. Zu diesem Zweck liste ich einige (in ZF) zum Primidealsatz äquivalente Aussagen auf, unter denen sich auch bekannte Sätze aus der Algebra, der Logik, der Topologie, der Verbandstheorie und der unendlichen Kombinatorik befinden. Auch in weiteren Gebieten der Mathematik (z. B. der Funktionalanalysis oder der Graphentheorie) finden sich weitere äquivalente Aussagen, die ich hier gar nicht erwähnt habe. Die meisten der in diesem Kapitel gezeigten Äquivalenzen sind schon seit längerem bekannt und gehören zur „Folklore“ der Mathematik, so z.B. der Satz von Tychonoff oder der Kompaktheitssatz. Daß aber die verschiedenen Formen des Primelementsatzes (siehe Korollar 2.5), das Krullsche Lemma für *nichtkommutative* Ringe sowie der Satz von Tychonoff für nüchterne Räume äquivalent zum Primidealsatz sind, wurde erst vor kurzem von Erné und Banaschewski bewiesen.

Um den Hauptsatz dieses Kapitels zu beweisen, sind zunächst einige Definitionen nötig:

Definition 2.1 Eine Familie B von Teilmengen einer Menge S ist eine Mengenalgebra genau dann, wenn gilt:

(i) $S \in B$ und

(ii) sind X, Y aus B, so auch $X \cap Y$, $X \cup Y$ und $S \setminus X$.

Sei S eine Menge und M eine Familie von Funktionen $f : P \to \{0, 1\}$ mit $P \subset\subset S$. Dann heißt M binäres Maß auf S, falls gilt:

(i) für jedes $P \subset\subset S$ existiert ein $f \in M$ mit $\mathrm{Vb}(t) = P$ und

(ii) gilt $t \in M$ und $P \subset\subset S$, so folgt $t|P \in M$.

Eine Funktion $f : S \to \{0, 1\}$ heißt konsistent mit M, falls für jedes $P \subset\subset S$ gilt: $f|P \in M$.
Das Auswahlaxiom für Familien $(A_i)_{i \in I}$ endlicher Mengen A_i wird mit ACF abgekürzt.
Eine Mengensystem $\mathcal{M}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn jede nichtleere, endliche Teilmenge von $\mathcal{M}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Ein <u>Ideal</u> eines Verbandes L ist ein unterer Abschnitt I von L, der gegen endliche Suprema abgeschlossen ist. Ein <u>Filter</u> ist ein duales Ideal, also ein oberer Abschnitt, der gegen endliche Infima abgeschlossen ist. Da das Supremum der leeren Menge genau dann existiert, wenn der Verband ein kleinstes Element hat (und dann das kleinste Element ist), ist insbesondere die leere Menge genau dann ein Ideal in einem Verband L, wenn L kein kleinstes Element hat. Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für Filter. Die Menge aller Ideale eines Verbandes ist offensichtlich ein Hüllensystem und damit selber ein (vollständiger) Verband, der <u>Idealverband</u>. Ein Element p eines Verbandes L heißt $\wedge$-prim, wenn für jede endliche Menge E mit $\bigwedge E \leq p$ ein Element e von E mit $e \leq p$ existiert. Damit ist insbesondere das größte Element eines Verbandes nie $\wedge$-prim. Analog wird $\vee-$prim definiert. Falls Elemente nur als prim bezeichnet werden, ist im allgemeinen die $\vee$-Primheit gemeint. Die $\wedge$-primen Elemente des Idealverbandes eines Verbandes L sind die <u>Primideale</u> von L. Analog werden <u>Primfilter</u> definiert. Ist der Verband L ein Mengensystem (d. h. die $\wedge$- und $\vee$-Operationen sind gerade der Durchschnitts- und die Vereinigungsoperationen), so spricht man statt von Primfiltern oft auch von <u>Ultrafiltern</u>. Man beachte, daß für jeden Verband L nun L selbst ein Ideal, aber kein Primideal ist. Eine <u>Scott-offene Teilmenge</u> eines vollständigen Verbandes schließlich ist ein oberer Abschnitt, dessen Komplement gegen gerichtete Suprema abgeschlossen ist.
Ein topologischer Raum (X, τ) ist <u>kompakt</u>, wenn jede Überdeckung von X mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dieses ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß jedes Mengensystem abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft einen nichtleeren Durchschnitt hat. (X, τ) ist ein <u>T_0-Raum</u> , wenn verschiedene Punkte verschiedene Punktabschlüsse haben. Ein T_0-Raum heißt <u>nüchtern</u>, falls im Verband der abgeschlossenen Mengen jede $\vee$-prime abgeschlossene Menge bereits der Abschluß einer einpunktigen Menge ist (man beachte, daß ungekehrt Punktabschlüsse immer $\vee$-prim sind). Es ist $S \subseteq \tau$ eine <u>Subbasis</u> von τ, falls sich jede offene Menge als eine (beliebige) Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus S darstellen läßt. Analog ist eine Teilmenge S der abgeschlossenen Mengen eine Subbasis, falls jede abgeschlossene Menge ein Durchschnitt von endlichen Vereinigungen von Mengen aus S ist.
Eine Formel ϕ in einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe ist ein <u>Satz</u> genau dann, wenn sie keine freien Variablen enthält. Die Sprache einer Formelmenge Σ wird mit <u>$\mathcal{L}(\Sigma)$</u> bezeichnet. Eine <u>Theorie</u> T ist eine Menge von Sätzen. Ein <u>Modell</u> einer Theorie ist eine Struktur mit entsprechenden Konstanten, Funktionen und Relationen, in denen jede Formel der Theorie gültig ist. Ein Satz ϕ ist in einer Theorie T <u>gültig</u> (geschrieben $T \models \phi$), wenn sie in jedem Modell der Theorie gültig ist. Ist die Formel ϕ aus T herleitbar, so schreibt man $T \vdash \phi$. T heißt <u>(syntaktisch) widerspruchsfrei</u>, wenn kein Satz der Form $\phi \wedge \neg\phi$ aus T hergeleitet werden kann. T heißt <u>maximal widerspruchsfrei</u>, wenn weiterhin für jeden Satz ϕ aus $\mathcal{L}(T)$ entweder $T \vdash \phi$ oder $T \vdash \neg\phi$ gilt.

Satz 2.2 *In ZF sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *(SPIT)*
Ist D ein distributiver Verband, $I \subseteq D$ ein Ideal, $F \subseteq D$ ein nichtleerer Filter mit $I \cap F = \emptyset$, so existiert ein Primideal $P \subseteq D$ mit $P \supseteq I$ und $P \cap F = \emptyset$.

(ii) *(MSPET)*
Ist $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger distributiver Verbände, sind $U_i \subseteq L_i$ Scott-offene Filter und c_i Elemente aus $L_i \setminus U_i$ für jedes $i \in I$, so existiert eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Primelementen mit $p_i \in L_i \setminus U_i$ und $p_i \geq c_i$ für jedes $i \in I$.

(iii) *(PET)*
Jeder nichttriviale vollständige Verband mit kompaktem größtem Element hat ein Primelement.

(iv) *Krullsches Lemma*
Ist in einem Ring ein Ideal I und eine dazu disjunkte multiplikative Menge M gegeben, so existiert ein zu M disjunktes Primideal P mit $I \subseteq P$.

(v) *Boolescher Primidealsatz, starke Fassung*
In jedem Booleschen Verband ist jedes echte Ideal in einem Primideal enthalten.

(vi) *Stonescher Darstellungssatz*
Jeder Boolesche Verband ist isomorph zu einer Mengenalgebra.

(vii) *(BPI) Boolescher Primidealsatz*
Jeder nichttriviale Boolesche Verband enthält ein Primideal.

(viii) *Ultrafiltersatz*
Jeder Filter auf einer Menge läßt sich zu einem Ultrafilter erweitern.

(ix) *Satz von Tychonoff für T_2-Räume*
Ein Produkt von nichtleeren, kompakten T_2-Räumen ist ein nichtleerer, kompakter Raum.

(x) *Satz von Tychonoff für endliche, diskrete Räume*
Ein Produkt von nichtleeren, endlichen, diskreten Räumen ist ein nichtleerer, kompakter Raum.

(xi) *Satz von Rado + ACF*
Satz von Rado: Es sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer, endlicher Mengen und es sei $(f_J)_{J\subset\subset I}$ eine Familie von Auswahlfunktionen $f_J : J \to A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Dann existiert eine globale Auswahlfunktion $f : I \to A$, die die folgende Eigenschaft hat: $\forall J \subset\subset I \, \exists K \subset\subset I \, : \, J \subseteq K \wedge f|J = f_K|J$.

(xii) *Alexandersches Subbasislemma*
Sei S eine Subbasis der abgeschlossenen Mengen des topologischen Raumes (X, τ). Hat dann jede Teilmenge S' von S, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, einen nichtleeren Durchschnitt, so ist (X, τ) kompakt.

(xiii) *Satz von Tychonoff für Potenzen des Raumes* $\{0, 1\}$
Jede Potenz des diskreten, zweipunktigen Raumes $X = \{0, 1\}$ *ist kompakt.*

(xiv) *Konsistenzsatz*
Für jedes binäre Maß M *auf einer Menge* S *existiert eine Funktion* f *auf* S*, die mit* M *konsistent ist.*

(xv) *Satz von Gödel*
Ist eine Theorie T *syntaktisch widerspruchsfrei, so besitzt sie ein Modell.*

(xvi) *Vollständigkeitssatz*
Für eine Theorie T *und einen Satz* ϕ *gilt:* $T \models \phi$ *genau dann, wenn* $T \vdash \phi$ *.*

(xvii) *Kompaktheitssatz*
Besitzt jede endliche Teilmenge einer Theorie T *ein Modell, so auch* T*.*

Der Beweis dieses Satzes erfolgt am Ende des Kapitels.

Mit Satz 2.2 bin ich nun sofort in der Lage, eine Liste von verschiedenen Formen des Lemmas von Tychonoff aufzuführen, die alle äquivalent zum Primidealsatz sind. Leider findet sich meines Wissens in der Literatur keine derartige Übersicht, sondern es wird häufig nur eine bestimmte Form (meistens Form (ii) des folgenden Korollars) des Lemmas von Tychonoff erwähnt.

Korollar 2.3 *In* ZF *sind folgende Variationen des Tychonoff-Lemmas zum Primidealsatz äquivalent:*

(i) *Das Produkt nichtleerer, kompakter* T_2*-Räume ist ein nichtleerer und kompakter* T_2*-Raum.*

(ii) *Das Produkt kompakter* T_2*-Räume ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

(iii) *Jede Potenz eines kompakten* T_2*-Raumes ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

(iv) *Das Produkt nichtleerer, endlicher, diskreter Räume ist ein nichtleerer und kompakter* T_2*-Raum.*

(v) *Das Produkt endlicher, diskreter Räume ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

(vi) *Jede Potenz eines endlichen, diskreten Raumes ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

(vii) *Das Produkt zweielementiger, diskreter Räume ist ein nichtleerer und kompakter Raum.*

(viii) *Das Produkt zweielementiger und diskreter Räume ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

(ix) *Jede Potenz eines zweielementigen und diskreten Raumes ist ein kompakter* T_2*-Raum.*

Beweis: Offenbar impliziert (i) jede andere Aussage des Lemmas, und jede Aussage des Lemmas impliziert (ix). Da aber (i) und (ix) äquivalent zum Primidealsatz sind, ist damit das Korollar bewiesen. □

Im nächsten Korollar werden nun verschiedene Formen des Primidealsatzes aufgeführt. Da die Äquivalenz der stärksten Form (i) und der schwächsten Form (vi) schon zum Standardwissen der Mathematik gehört, ist dieses Korollar nur eine etwas ausführlichere Darstellung bekannter Aussagen.

Korollar 2.4 *In* ZF *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Ist D ein distributiver Verband, $I \subseteq D$ ein Ideal, $F \subseteq D$ ein nichtleerer Filter mit $I \cap F = \emptyset$, so existiert ein Primideal $P \subseteq D$ mit $P \supseteq I$ und $P \cap F = \emptyset$.*

(ii) *Ist D ein distributiver Verband und $I \subseteq D$ ein echtes Ideal, so existiert ein Primideal P in D mit $I \subseteq P$.*

(iii) *Jeder nichttriviale distributive Verband enthält ein Primideal.*

(iv) *Ist B ein Boolescher Verband, $I \subseteq B$ ein Ideal, $F \subseteq B$ ein nichtleerer Filter mit $I \cap F = \emptyset$, so existiert ein Primideal $P \subseteq B$ mit $P \supseteq I$ und $P \cap F = \emptyset$.*

(v) *Ist B ein Boolescher Verband und $I \subseteq B$ ein echtes Ideal, so existiert ein Primideal P in B mit $I \subseteq P$.*

(vi) *Jeder nichttriviale Boolesche Verband enthält ein Primideal.*

Beweis: Der Beweis wird wie der Beweis des vorherigen Korollars geführt. □

Auch das Prinzip PET gibt es in verschiedenen Variationen.

Korollar 2.5 *Folgende Formen des Primelementsatzes sind äquivalent zum Primidealsatz:*

(i) *(MSPET)*
Ist $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger distributiver Verbände, sind $U_i \subseteq L_i$ Scott-offene Filter und c_i Elemente aus $L_i \setminus U_i$ für jedes $i \in I$, so existiert eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Primelementen mit $p_i \in L_i \setminus U_i$ für jedes $i \in I$.

(ii) *(SPET)*
Ist U ein Scott-offener Filter in einem vollständigen distributiven Verband L, so existiert zu jedem $c \in L \setminus U$ ein Primelement $p \in L \setminus U$ mit $c \leq p$.

(iii) *(MPET)*
Ist $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger distributiver Verbände mit kompakten größten Elementen, so existiert eine Familie $(p_i)_{i\in I}$ von Primelementen mit $p_i \in L_i$ für jedes $i \in I$.

(iv) *(PET)*
Jeder nichttriviale vollständige Verband mit kompaktem größtem Element hat ein Primelement.

Beweis: Analog zu den vorangehenden Korollaren. □

Das folgende Korollar geht auf Banaschewski (siehe [Bana87]) zurück.

Korollar 2.6 *Satz von Tychonoff für nüchterne Räume:*
MPET (und damit der Primidealsatz) impliziert folgende Aussagen:

(CSC) Jedes Produkt nichtleerer, kompakter, nüchterner Räume ist nichtleer.

(STT) Jedes Produkt kompakter, nüchterner Räume ist kompakt.

Weiterhin impliziert STT wiederum MPET.

Beweis: Ich möchte zuerst CSC beweisen. Sei dazu $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein Produkt nichtleerer, kompakter, nüchterner Räume (X_i, τ_i). Für jedes $i \in I$ ist dann der Verband τ_i der offenen Mengen von X_i ein vollständiger nichttrivialer distributiver Verband mit kompaktem größtem Element (letzteres, da X_i kompakt ist). Somit liefert MPET eine Familie $(S_i)_{i \in I}$ von primen offenen Mengen $S_i \in \tau_i$. Aufgrund der Nüchternheit von X_i folgt $S_i = X_i \setminus \overline{\{x_i\}}$ für ein eindeutig bestimmtes $x_i \in X_i$, womit nun ein Element $(x_i)_{i \in I}$ aus $\prod_{i \in I} X_i$ gefunden ist.

Um STT zu beweisen, betrachte man ein beliebiges echtes Ideal J in dem Verband τ der offenen Mengen von $\prod_{i \in I} X_i$. Es ist $\bigcup J \neq X$ zu zeigen. Wendet man PET auf $\uparrow J$ im Idealverband von τ an, so erhält man ein Primideal $P \supseteq J$ in τ. Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$ definieren vermittels $f_i(O) = \mathrm{pr}_i^{-1}[O]$ auf kanonische Art und Weise Verbandseinbettungen $f_i : \tau_i \to \tau$. Damit erhält man in jedem τ_i ein Primideal $P_i = f_i^{-1}[P]$. Da P_i sogar ein echtes Ideal und X_i kompakt ist, folgt $W_i = \bigcup P_i \neq X_i$ für jedes $i \in I$. Wendet man MPET auf die Verbände $\uparrow W_i \subseteq \tau_i$ an, so erhält man in τ_i prime Elemente $S_i \supseteq W_i$, die wie oben eindeutige $x_i \in X_i$ mit $S_i = X_i \setminus \overline{\{x_i\}}$ liefern. Angenommen, $x = (x_i)_{i \in I}$ ist ein Element von $\bigcup J$. Sei also O aus J mit $x \in O$. Da die endlichen Durchschnitte von Mengen der Form $f_i(O_i)$ mit $O_i \in \tau_i$ eine Basis von τ bilden, gibt es ein $F \subset\subset I$ und Mengen $O_i \in \tau_i$, $i \in F$ mit $x \in \bigcap_{i \in F} f_i(O_i) = O \in P$. Da P ein Primideal ist, existiert weiterhin ein $k \in F$ mit $f_k(O_k) \in P$. Daraus folgt nun sofort $O_k \in P_k$. Damit gilt einerseits $x \notin O_k$ wegen $x_k \notin S_k \supseteq \bigcup P_k$, andererseits aber $x_k \in O_k$ wegen $x \in f_k(O_k)$, also offensichtlich ein Widerspruch. Es folgt $x \notin \bigcup J$ und damit $\bigcup J \neq X$, was zu zeigen war.

Um schließlich aus STT den Satz von Tychonoff für T_2-Räume und damit wieder MPET herzuleiten, reicht es zu zeigen, daß jeder T_2-Raum nüchtern ist. Sei also A eine abgeschlossene $\vee$-prime Menge in einem T_2-Raum X. Angenommen, A enthält zwei verschiedene Elemente x und y. Dann existieren zwei disjunkte, offene Mengen U_x, U_y mit $x \in U_x$ und $y \in U_y$. Es folgt $A \subseteq X \setminus U_x \cup X \setminus U_y$, also o. B. d. A. $A \subseteq X \setminus U_x$. Das impliziert $x \in X \setminus U_x$, offensichtlich ein Widerspruch. Damit ist jede $\vee$-prime Menge bereits einelementig, woraus sofort die Nüchternheit von X folgt. □

Bemerkung: Da aus STT der Primidealsatz und damit wiederum CSC folgt, kann man in ZF nun CSC aus STT herleiten. Ein Beweis von CSC aus STT kann man aber auch durch eine Anpassung des Beweises von Kelley, daß der Satz von Tychonoff für beliebige kompakte Räume bereits das Auswahlaxiom impliziert, erbringen. Ähnlich wie in Korollar 2.3 erhält man also, daß auch das Prinzip

jedes Produkt nichtleerer, kompakter, nüchterner Räume ist ein nichtleerer, kompakter Raum

äquivalent zum Primidealsatz ist. Bevor ich nun Satz den grundlegenden Satz dieses Kapitels, beweise, möchte ich zwei der schwierigsten Implikationen in seperaten Lemmata herleiten.

Das nächste Lemma basiert im wesentlichen auf der Arbeit [Erné85] von Erné, in der die Äquivalenz von (SPIT) und (SPET) gezeigt wird. In [Bana87] zeigte Banaschewski unter anderem die Äquivalenz von (PET) und (MPET). Eine Vermischung der Prinzipien (SPET) und (MPET) und der eben erwähnten Beweise ergab dann die Äquivalenz von (MSPET) und (SPIT). Die Konstruktion des Koproduktes in dem Beweis habe ich dabei der Note [Bana90] von Banaschewski entnommen.

Lemma 2.7 *SPIT$\Longrightarrow$MSPET.*

Ich will zuerst zeigen, daß für eine Familie $(D_i)_{i\in I}$ beschränkter distributiver Verbände das Koprodukt $\coprod_{i\in I} D_i$ in der Varietät der beschränkten distributiven Verbände existiert und genau dann nichttrivial ist, wenn jeder Verband D_i nichttrivial ist. Seien also $D_i, i \in I$ beschränkte distributive Verbände mit größtem Element $\top_i \in D_i$ und kleinstem Element $\bot_i \in D_i$, dabei seien die D_i o. B. d. A. disjunkt. Dann setzt man zunächst $A = \bigcup_{i\in I} D_i$, weiterhin sei i_a für ein $a \in A$ der eindeutig bestimmte Index mit $a \in D_{i_a}$. Ich definiere nun eine Menge X von Variablen durch $X = \{x_a \,|\, a \in D_i \text{ für ein } i \in I\}$, und es sei T die Menge aller Terme, die man über X mit den binären Operationen $\vee$ und $\wedge$ sowie mit den Konstanten $\top$ und $\bot$ bilden kann. Sei schließlich Σ die Menge aller Gleichungen, die

(i) in beschränkten distributiven Verbänden gelten, oder

(ii) die Form $x_{a_1} \vee \ldots \vee x_{a_n} = x_{a_1\vee\ldots\vee a_n}$ bzw. die Form $x_{a_1} \wedge \ldots \wedge x_{a_n} = x_{a_1\wedge\ldots\wedge a_n}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in D_i$ für ein $i \in I$ haben oder

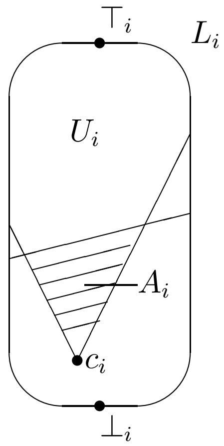
(iii) die Form $x_{\bot_i} = \bot$ bzw. die Form $x_{\top_i} = \top$ für ein $i \in I$ haben.

Die absolut freie Termalgebra T kann ich nun durch die Gleichungsmenge Σ durchfaktorisieren und erhalte so einen beschränkten distributiven Verband D mit den Operationen $\vee$ und $\wedge$ und den Konstanten $\top$ und $\bot$. Zu jedem $i \in I$ definiert man nun eine Funktion $h_i : D_i \to D$, indem man jedem $a \in D_i$ die Äquivalenzklasse von x_a zuordnet. Da Σ die Gleichungen der Form (ii) oder (iii) enthält, ist jedes h_i ein Homomorphismus (in der Varietät der beschränkten distributiven Verbände). Ist nun weiterhin zu jedem $i \in I$ ein

Homomorphismus $f_i : D_i \to L$ in einen beschränkten distributiven Verband L gegeben, so kann man die Abbildung $f' : X \to L$ mit $f'(x_a) = f_{i_a}(a)$ eindeutig auf T fortsetzen und erhält nach dem Faktorisieren einen Homomorphismus $f : D \to L$, der $f_i = f \circ h_i$ für jedes i in I erfüllt. Damit ist D das Koprodukt der D_i.

Ist eines der D_i trivial, d. h. es gilt $\bot_i = \top_i$, so folgt wegen (iii) sofort $\bot = \top$, also ist das Koprodukt trivial.

Sei nun jedes D_i nichttrivial. Um zu zeigen, daß das Koprodukt D nichttrivial ist, reicht es, einen nichttrivialen beschränkten distributiven Verband D' mit Elementen $x'_a, a \in A$ anzugeben, so daß die Entsprechungen der Gleichungen aus (ii) und (iii) gelten. Dazu betrachte man zunächst das Produkt $\prod_{i\in I} D_i$ der D_i, das nach Voraussetzung ein Primideal J enthält. Man rechnet leicht nach, daß für jedes $i \in I$ die i-te Projektion $J_i := p_i[J]$ von J ein Primideal in D_i ist. Sei $D' = \{\bot', \top'\}$ der zweielementige Verband. Für $a \in A$ sei $x_a = \bot'$, falls $a \in J_{i_a}$, und $a = \top'$, falls $a \notin J_{i_a}$. Die Gleichungen aus (i) und (iii) gelten in D' trivialerweise, die Gleichungen aus (ii) gelten, da die J_i Primideale sind. Da D' nichttrivial ist, muß es D nun auch sein.



Ich komme jetzt zum Beweis von MSPET. Da der Beweis sich innerhalb der Varietät der beschränkten distributiven Verbände bewegt, sind Ausdrücke wie *Homomorphismus* oder *Koprodukt* in diesem Sinne zu verstehen. Seien also L_i o. B. d. A. disjunkte, vollständige distributive Verbände, U_i Scott-offene Filter in L_i und $c_i \in L_i \setminus U_i$ für jedes $i \in I$. Zunächst wird $A_i = \uparrow c_i \setminus U_i$ und $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ gesetzt. Für jedes $a \in A$ sei weiterhin i_a das Element aus I mit $a \in L_{i_a}$. Man definiert jetzt K als das Koprodukt aller Hauptfilter $\uparrow a = [a, \top_{i_a}]$, $a \in A$, und es seien $k_a : \uparrow a \to K$ die zugehörigen Koproduktabbildungen. Zuerst möchte ich zeigen, daß für jedes $E \subset\subset A$ und für beliebige Elemente $b_a \in \uparrow a \cap U_{i_a}$ mit $a \in E$ die Ungleichung

$$\bigwedge\{k_a(b_a) \mid a \in E\} \neq \bot_K \tag{2.1}$$

gilt. Seien also E und b_a, $a \in E$ entsprechend gewählt. Für jedes $a \in A \setminus E$ setze $b_a = \top_{i_a}$. Man betrachte die Homomorphismen $m_a : [a, \top_{i_a}] \to [a, b_a]$ mit $m_a(x) = x \wedge b_a$. Das Koprodukt K' aller Intervalle $[a, b_a]$ ist nichttrivial, da $a < b_a$ für jedes $a \in A$ gilt. Seien $k'_a : [a, b_a] \to K'$ die zugehörigen Koproduktabbildungen. Insgesamt erhält man aufgrund der universellen Eigenschaft von Koprodukten eine Abbildung m, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "m"] & & K' \\
& & \\
{[a, \top_{i_a}]} \arrow[uu, "k_a"] \arrow[uurr, "k'_a \circ m_a"] \arrow[rr, "m_a"'] & & {[a, b_a]} \arrow[uu, "k'_a"']
\end{tikzcd}$$

Für jedes $a \in A$ ist b_a das größte Element von $[a, b_a]$, und jede Abbildung k'_a erhält größte Elemente. Somit kann man jetzt folgendes berechnen:

$$\begin{aligned} m(\bigwedge\{k_a(b_a) \mid a \in E\}) &= \bigwedge\{m(k_a(b_a)) \mid a \in E\} \\ &= \bigwedge\{k'_a(m_a(b_a)) \mid a \in E\} \\ &= \bigwedge\{k'_a(b_a) \mid a \in E\} \\ &= \top_{K'} \end{aligned}$$

Da aber $\top_{K'} \neq \bot_{K'}$ gilt und m kleinste Elemente erhält, ist somit (2.1) bewiesen. Nun setzt man

$$F = \uparrow\{\bigwedge\{k_a(b_a) \mid a \in E\} \mid E \subset\subset A \text{ und } b_a \in \uparrow a \cap U_{i_a} \text{ für jedes } a \in E\}\,.$$

Da $\uparrow a \cap U_{i_a}$ gegen endliche Infima abgeschlossen ist und k_a natürlich solche Infima erhält, muß nun F ein echter Filter in K sein. Gemäß SPIT existiert nun ein Primideal P in K, das zu F disjunkt ist. Damit ist auch $P_a = k_a^{-1}[P]$ für jedes $a \in A$ ein Primideal in $[a, \top_{i_a}]$. Für jedes $p \in P_a$ gilt $k_a(p) \in P$, also $k_a(p) \notin F$, woraus gemäß der Definition von F nun $p \notin \uparrow a \cap U_{i_a}$ folgt. Somit ist P_a eine gerichtete Menge, die ganz in $\uparrow a \setminus U_{i_a}$ liegt. Da U_{i_a} Scott-offen ist, folgt $\bigvee P_a \in \uparrow a \setminus U_{i_a} \subseteq A_{i_a}$. Also kann man für jedes $i \in I$ eine extensive Abbildung $s_i : A_i \to A_i$ mit $s_i(a) = \bigvee P_a$ konstruieren. Es ist jedes A_i bezüglich gerichteter Suprema abgeschlossen. Somit erhält man mit Bourbakis Fixpunktlemma oder einfach mit transfiniter Induktion für jedes $i \in I$ einen kleinsten Fixpunkt p_i von s_i. Für jedes $i \in I$ ist somit $P_{p_i} = \{p_i\}$ ein Primideal in $\uparrow p_i$, womit p_i irreduzibel, also auch prim in L_i ist. Es gilt auch $p_i \in A_i = \uparrow c_i \setminus U_i$. Somit ist $(p_i)_{i \in I}$ die gesuchte Familie von Primelementen. □

Definition 2.8 Um das folgende Lemma zu beweisen, sind erst ein paar Definitionen nötig. Man beachte, daß dabei einige Wörter wie *prim* etc. in diesem Kontext ringtheoretisch und nicht verbandstheoretisch definiert werden. Ein <u>Quantal</u> ist ein vollständiger Verband Q mit einer zusätzlichen assoziativen Multiplikation, die über beliebige Suprema vertauscht und die unterhalb der Infimumsoperation liegt, d. h. es gilt für beliebige $a, b \in Q$ und $X \subseteq Q$:

$$a(\bigvee X) = \bigvee\{ax \mid x \in X\}\ ,\ (\bigvee X)a = \bigvee\{xa \mid x \in X\} \text{ und } ab \leq a \wedge b\,.$$

Eine Teilmenge eines Quantales heißt <u>m-Filter</u>, falls sie ein gegenüber der Multiplikation abgeschlossener,nichtleerer oberer Abschnitt ist. Wegen $ab \leq a \wedge b$ ist ist jeder m-Filter offensichtlich ein Filter im üblichen verbandstheoretischen Sinne. Ein Element p eines Quantales heißt <u>prim</u>, falls $ab \leq p \implies a \leq p \vee b \leq p$ für beliebige $a, b \in Q$ gilt und es nicht das größte Element ist. Eine <u>multiplikative Teilmenge</u> ist eine gegenüber der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge. Schließlich ist ein <u>lokaler Nukleus</u> eines Quantales Q ein Hüllenoperator s auf Q, der $s(ab) = s(a) \wedge s(b)$ für alle $a, b \in Q$ erfüllt. Man beachte, daß die Menge $\mathrm{Fix}(s) = \{a \in Q \mid s(a) = a\} = s[Q]$ für jeden lokalen Nukleus nicht nur ein vollständiger Verband, sondern sogar ein Lokal ist (d. h. ein Verband, in dem binäre Infima mit beliebigen Suprema vertauschen).

Es ist schon lange bekannt, daß der Primidealsatz zum Krullschen Lemma für *kommutative* Ringe äquivalent ist. Daß aber die entsprechende Äquivalenz auch im allgemeinen Fall für *beliebige* Ringe gilt, wurde erst vor kurzem von Banaschewski und Erné in [BaEr93] veröffentlicht.

Lemma 2.9 *PET impliziert das Krullsche Lemma.*

Beweis: Sei R ein Ring und M eine multiplikative Teilmenge von R. Da ein beliebiger Schnitt von Idealen in R wieder ein Ideal ist, ist ID R, die Menge aller Ideale von R, ein vollständiger Verband (bzgl. $\subseteq$). Versieht man ID R weiterhin mit der üblichen Multiplikation von Idealen, so ist ID R sogar ein Quantal. Die Menge S aller Ideale, die M schneiden, bilden einen Scott-offenen m-Filter in diesem Quantal. Weiterhin sind die primen Elemente von ID R genau die Primideale von R. Es reicht also, wenn ich folgende Behauptung zeige:

Jedes Element außerhalb eines Scott-offenen m-Filters S in einem Quantal Q liegt unterhalb von einem Primelement, das ebenfalls nicht in S liegt.

Um dieses zu zeigen, konstruiert man als erstes einen lokalen Nukleus s auf Q, für den $\forall a(s(a) = \top \iff a \in S)$ gilt. Dazu setzt man für jedes $a \in Q$ zunächst

$$S_a = \{x \in Q \,|\, \forall y(x \vee y \in S \Longrightarrow a \vee y \in S)\} \,.$$

Offensichtlich ist jedes S_a ein unterer Abschnitt mit $a \in S_a$. Es ist S_a auch nach oben gerichtet: Sind x, z aus S_a und gilt $x \vee z \vee y \in S$, so folgt $a \vee z \vee y \in S$, also auch $a \vee y = a \vee y \vee y \in S$, was schließlich $x \vee z \in S_a$ liefert. Nun setzt man $s(a) = \bigvee S_a$ für jedes $a \in Q$ und zeigt als nächstes $s(a) \in S_a$. Gilt nämlich $s(a) \vee y = \bigvee(S_a \vee y) \in S$ für ein y, so muß es ein $x \in S_a$ geben mit $x \vee y \in S$ (denn S ist Scott-offen und $S_a \vee y$ ist eine gerichtete Menge), woraus $a \vee y \in S$ folgt. Wegen $s(a) \in S_a$ gilt $\forall y(s(a) \vee y \in S \Longrightarrow a \vee y \in S)$, womit nun $S_{s(a)} \subseteq S_a$, also $s(s(a)) \leq s(a)$ folgt. Da s weiterhin extensiv und isoton ist, ist s sogar ein Hüllenoperator. Es liefert $ab \leq a, b$ offensichtlich auch $s(ab) \leq s(a) \wedge s(b)$. Um nun die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, setzt man $x = s(a) \wedge s(b)$. Ich möchte $x \in S_{ab}$ zeigen. Sei also $x \vee y \in S$ für ein $y \in Q$. Da $x \in S_a$ und $x \in S_b$ gelten, folgen $a \vee y \in S$ und $b \vee y \in S$, somit auch $(a \vee y) \cdot (b \vee y) \in S$. Aus der Abschätzung

$$(a \vee y) \cdot (b \vee y) = ab \vee yb \vee ay \vee y^2 \leq ab \vee y$$

folgt nun $ab \vee y \in S$. Somit gilt $x \in S_{ab}$, also $s(a) \wedge s(b) \leq s(ab)$. Insgesamt ist s also ein lokaler Nukleus. Aus $a \in S$ folgt $S_a = Q$, also $s(a) = \top$. Gelte nun umgekehrt $s(a) = \top$ für ein $a \in Q$. Das liefert $\top \in S_\top = S_{s(a)} \subseteq S_a$. Wegen $\top \vee \bot = \top \in S$ folgt $a = a \vee \bot \in S$ nach Definition von S_a. Somit erfüllt s alle geforderten Eigenschaften.

Setze nun $D = \mathrm{Fix}(s)$. D ist ein Lokal mit demselben größten Element $\top$ wie Q. Ich zeige nun, daß $\top$ in D kompakt ist: Die gerichteten Mengen in D sind genau die Bilder gerichteter Mengen in Q unter s. Bezeichnet $\bigsqcup$ die Supremumsoperation in D (d. h. für $M \subseteq D$ gilt $\bigsqcup M = s(\bigvee M)$), so gilt für jede Teilmenge N von Q:

$$\bigsqcup s[N] = \top \iff s[\bigvee N] = \top \iff \bigvee N \in s^{-1}\{\top\} \,.$$

Es gilt nun allgemeiner: $s^{-1}\{\top\}$ ist genau dann Scott-offen, wenn $\top$ kompakt in D ist. Da aber $S = s^{-1}\{\top\}$ gilt, ist $\top$ in D tatsächlich kompakt.

Sei jetzt schließlich a ein Element aus $Q \setminus S$. Da $s(a) < \top$ in D gilt, existiert nach PET ein Primelement p (im verbandstheoretischen Sinne) in $D \cap \uparrow s(a)$. Da in D das Distributivgesetz gilt, ist p auch in D ein Primelement. In Q ist p aber auch im ringtheoretischen Sinne prim: Gilt nämlich $bc \leq p$ in Q, so folgt $s(b) \wedge s(c) = s(bc) \leq s(p) = p$, also auch $b \leq s(b) \leq p$ oder $c \leq s(c) \leq p$. □

2.2, Ich bi nun in der Lage, den Gesamtbeweis von Satz 2.2 zu führen. Die Beweise der einzelnen Implikationen habe ich verschiedenen Quellen entnommen, die ich zunächst aufzählen will.

Die Herkunft der ersten drei Implikationsbeweise ist klar. Die nächsten vier sind Standardargumente, die man auch bis auf den Beweis von (iv)$\Longrightarrow$(v) in [Jech73] findet. Die Beweise von (viii)$\Longrightarrow$(ix) und (x)$\Longrightarrow$(xi) verdanke ich Frank Vogt. Die Implikation (xi)$\Longrightarrow$(xii) wurde von Wolk in [Wolk67] bewiesen. Die weiteren Beweise stammen von mir, sind aber mindestens bei den Richtungen (xii)$\Longrightarrow$(xiii), (xv)$\Longrightarrow$(xvi) und (xvi)$\Longrightarrow$(xvii) Standardargumente.

Beweis von Satz 2.2:

„(i)$\Rightarrow$(ii)“ Lemma 2.7

„(ii)$\Rightarrow$(iii)“ trivial (da $\{\top\}$ Scott-offener Filter ist).

„(iii)$\Rightarrow$(iv)“ Lemma 2.9

„(iv)$\Rightarrow$(v)“ Ist B eine Boolesche Algebra, so betrachte man den zugehörigen Booleschen Ring R. Da sowohl die Ideale als auch die Primideale in B und R dieselben ist, folgt aus dem Krullschen Lemma unmittelbar der Boolesche Primidealsatz.

„(v)$\Rightarrow$(vi)“ Sei B eine Boolesche Algebra und $S := \{U \,|\, U$ ist ein Primfilter von $B\}$. Für $u \in B$ sei $f(u) := \{U \in S \,|\, u \in U\}$. Man rechnet nach, daß f ein Boolescher Homomorphismus ist, d. h. es gilt $f(u \vee v) = f(u) \cup f(v)$, $f(u \wedge v) = f(u) \cap f(v)$ und $f(u^\perp) = S \setminus f(u)$. Sei nun $u \not\geq v$, d. h. $u \vee v^\perp \neq \top$. Dann existiert nach Voraussetzung ein Primideal P mit $u \vee v^\perp \in P$, also $u \in P$, $v \notin P$. D. h. $P \in f(u)$, $P \notin f(v)$. Also ist f auch injektiv.

„(vi)$\Rightarrow$(vii)“ Sei B eine Mengenalgebra auf einer nichtleeren Menge S. Sei $u \in S$ und $U := \{b \in B \,|u \in b\}$. Man rechnet nach, daß U ein Primfilter ist, also ist $P := B \setminus U$ ein Primideal.

„(vii)$\Rightarrow$(viii)“ Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter in $\mathfrak{P}(X)$. Sei $\mathcal{I} = \{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{F}\}$ das zu $\mathcal{F}$ dual isomorphe Ideal. Für $U, V \subseteq X$ sei $U \sim V :\Longleftrightarrow (U \cap V^\perp) \cup (U^\perp \cap V) \in \mathcal{I}$. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation mit $[\emptyset]_\sim = \mathcal{I}$. In $\mathfrak{P}(X)/\sim$ existiert gemäß Voraussetzung ein Primideal $\mathcal{P}'$. Nun sei $\mathcal{P} := \{U \subseteq X \,|\, [U]_\sim \in \mathcal{P}'\}$. $\mathcal{P}$ ist ein Primideal in $\mathfrak{P}(X)$ mit $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{I}$. Somit ist $\mathcal{P}^c = \{X \setminus U \,|\, U \in \mathcal{P}\}$ ein Primfilter in $\mathfrak{P}(X)$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{I}^c \subseteq \mathcal{P}^c$.

„(viii)$\Rightarrow$(ix)“ Sei $(X_i)_{i \in I}$ ein Familie kompakter T_2-Räume. Behauptung: $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Setze $Z := \{f \,|\, f$ Funktion, $\mathrm{Vb}f \subseteq I$ und $f(i) \in X_i$ für $i \in \mathrm{Vb}f\}$. Es ist Z nichtleer.

Setze nun $Z_i := \{f \in Z \mid i \in \mathrm{Vb}f\}$. Für $i, j \in I$ gilt $Z_i \cap Z_j \neq \emptyset$, also kann ich $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ als den von $\{Z_i \mid i \in I\}$ erzeugten Filter definieren. Nach Voraussetzung existiert ein Primfilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$. Sei $i \in I$ fest und $\mathcal{U}_i := \{\mathrm{pr}_i[U] \mid U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathfrak{P}(X_i)$ (dabei ist pr_i die i-te Projektion). Für $U \in \mathcal{U}$ gilt $U \cap Z_i \neq \emptyset$, also $\mathrm{pr}_i[U] \neq \emptyset$, d. h. $\emptyset \notin \mathcal{U}_i$. Da $\mathrm{pr}_i[U \cap V] \subseteq \mathrm{pr}_i[U] \cap \mathrm{pr}_i[V]$, ist $\mathcal{U}_i$ nach unten gerichtet. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{U}_i$ gegen Obermengen abgeschlossen und damit ein Filter ist. $\mathcal{U}_i$ ist sogar ein Primfilter: Sei $Y \subseteq X_i$. Betrachte $U := \{f \in Z \mid f(i) \in Y\} \subseteq Z$. Es gilt $\mathrm{pr}_i[U] = Y$ und $\mathrm{pr}_i[Z \setminus U] = X_i \setminus Y$, also, da $\mathcal{U}$ ein Primfilter ist, $Y \in \mathcal{U}_i$ oder $X_i \setminus Y \in \mathcal{U}_i$. Setze nun $Y_i := \bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{U}_i\}$. Es ist jedes Y_i höchstens einelementig, da X_i ein T_2-Raum ist. Es ist auch Y_i nichtleer, da X_i kompakt ist. Also ist jedes $Y_i \subseteq X_i$ genau einelementig, womit auch ein Element aus $\prod_{i \in I} X_i$ gefunden ist.

Nun zeige ich, daß $\prod_{i \in I} X_i$ kompakt ist:

Sei $\mathcal{F}$ ein beliebiger Filter auf $\prod_{i \in I} X_i$. Es reicht zu zeigen: $\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Gemäß Voraussetzung existiert ein Primfilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$. Setze $A_i := \bigcap\{\overline{\mathrm{pr}_i(F)} \mid F \in \mathcal{U}\}$. Wie eben zeigt man, daß jedes A_i einelementig ist. So erhält man ein Element aus $\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{U}\}$, also erst recht ein Element aus $\bigcap\{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$.

„(ix)⇒(x)“ trivial

„(x)⇒(xi)“ Daß ACF gilt, ist trivial, es ist nur der Satz von Rado zu zeigen. Sei also $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie endlicher, nichtleerer Mengen; jedes A_i sei mit der diskreten Topologie versehen. Für $J \subset\subset I$ setze $E_J := \{f \in X = \prod_{i \in I} A_i \mid \exists K \subset\subset I : J \subseteq K\,,\ f|J = f_K|J\}$. Da $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, existiert für beliebige $J \subset\subset I$, $i \in I \setminus J$ und $a_i \in A_i$ ein $f \in \prod_{i \in I} A_i$ mit $f(i) = a_i$ und $f|J = f_J$. Damit folgt $E_J \neq \emptyset$ und $\mathrm{pr}_i[E_J] = A_i$ für $i \notin J$, d. h. E_J ist nichtleer und abgeschlossen in dem Produktraum $\prod_{i \in I} A_i$. Es gilt auch $E_{J_1} \cap E_{J_2} \supseteq E_{J_1 \cup J_2}$, also hat $\{E_J \mid J \subset\subset I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Damit folgt nach Voraussetzung: $\bigcap_{J \subset\subset I} E_J \neq \emptyset$. Wähle ein $F \in \bigcap_{J \subset\subset I} E_J$. Dieses F erfüllt nach Konstruktion die geforderten Eigenschaften.

„(xi)⇒(xii)“ Sei $\mathcal{G}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Es ist $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ zu zeigen. Setze

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{F \mid F \subset\subset S \text{ und } \textstyle\bigcup F \supseteq G \text{ für ein } G \in \mathcal{G}\} \text{ und} \\ \mathcal{B} &= \{\textstyle\bigcup F \mid F \in \Gamma\}\,. \end{aligned}$$

Es existiert zu jedem $x \notin \bigcap \mathcal{G}$ ein $G \in \mathcal{G}$ mit $x \notin G$. Damit existiert, da S eine Subbasis ist, ein $F \subset\subset S$ mit $G \subseteq \bigcup F$ und $x \notin \bigcup F$. Somit folgt $x \notin \bigcap \mathcal{B}$, also insgesamt $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{G}$ (es gilt sogar die Gleichheit). Es reicht also, wenn ich $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ zeige.

Sei $\Phi = \{F_1, \ldots, F_n\} \subset\subset \Gamma$. Gemäß Voraussetzung gilt $\bigcap\{\bigcup F \mid F \in \Phi\} \neq \emptyset$. Aus dem Distributivgesetz folgt $\bigcap\{\bigcup F \mid F \in \Phi\} = \bigcup\{\bigcap_{i=1,\ldots,n} S_i \mid S_1 \in F_1, \ldots, S_n \in F_n\}$, womit also zu jedem $F \in \Phi$ eine Subbasismenge $S_F \in F$ existiert, so daß $\bigcap\{S_F \mid F \in \Phi\} \neq \emptyset$ gilt. Mittels ACF wähle man nun simultan zu jedem $\Phi \subset\subset \Gamma$ eine Auswahlfunktion f_Φ von Φ mit $\bigcap\{f_\Phi(F) \mid F \in \Phi\} \neq \emptyset$. Sei f eine gemäß Rado gewählte globale Auswahlfunktion auf Γ und sei $S' = \{f(F) \mid F \in \Gamma\}$. S' hat die endliche Durchschnittseigenschaft: Ist nämlich $\Phi \subset\subset \Gamma$, so sei $\Phi \subseteq \Psi \subset\subset \Gamma$ gemäß Rado gewählt. Dann folgt

$$\bigcap\{f(F) \mid F \in \Phi\} = \bigcap\{f_\Psi(F) \mid F \in \Phi\} \neq \emptyset\,.$$

Aufgrund des Alexanderschen Subbasislemmas gilt nun $\bigcap S' \neq \emptyset$. Da aber $f(F) \subseteq \bigcup F$ für jedes $F \in \Gamma$ gilt, folgt nun auch $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$.

„(xii)⇒(xiii)" Sei S eine beliebige, nichtleere Menge und $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie versehen. Es ist zu zeigen, daß $\prod_{s \in S}\{0,1\}$ kompakt ist. Die Menge $\mathcal{A}$ aller $\prod_{s\in S} A_s$, wobei genau ein A_s einelementig und alle anderen A_t's zweielementig sind, ist eine Subbasis für die Menge der abgeschlossenen Mengen von $\prod_{s\in S}\{0,1\}$. Ist $\mathcal{A}'$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}$, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, so hat $\bigcap \mathcal{A}'$ offenbar die Form $\prod_{s\in S} A'_s$, wobei jedes A'_s mindestens ein Element hat. Somit ist $\bigcap \mathcal{A}'$ auch nichtleer.

„(xiii)⇒(xiv)" Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und M ein binäres Maß auf S. Betrachte für jedes $s \in S$ den zweipunktigen diskreten Raum $\{0,1\}$ und setze $X = \prod_{s\in S}\{0,1\} = \{0,1\}^S$. Für $I \subset\subset S$ sei $E_I = \{f \in X \mid f|I \in M\}$. Es folgt $E_{I_1} \cap E_{I_2} \supseteq E_{I_1 \cup I_2}$ für beliebige $I_1, I_2 \subset\subset S$, und es ist jedes E_I nichtleer, da M binäres Maß ist. Weiterhin ist jedes E_I in X abgeschlossen, denn es gilt $\mathrm{pr}_j[E_I] = \{0,1\}$ für jedes $j \notin I$. Damit hat $\mathcal{E} =\{E_I \mid I \subset\subset S\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Aufgrund der Kompaktheit von X existiert ein $f \in \bigcap \mathcal{E}$. Da jedes $f|I$ in E_I liegt, ist f nun das gesuchte konsistente Maß.

„(xiv)⇒(xv)" Sei Σ eine widerspruchsfreie Menge von Sätzen.

Behauptung: Es existiert eine maximal widerspruchsfreie Menge $\Sigma^\star \supseteq \Sigma$ von Sätzen mit $\mathcal{L}(\Sigma^\star) = \mathcal{L}(\Sigma)$.

Beweis: Sei S die Menge aller Sätze über $\mathcal{L}(\Sigma)$. Für $E \subset\subset S$ existiert eine widerspruchsfreie Theorie T von Sätzen, in der jedes $\phi \in E$ entscheidbar ist sowie aus der alle Sätze $\phi \in \Sigma \cap E$ herleitbar sind (das zeigt man leicht mit vollständiger Induktion über $|\Sigma \cap E|$). Also kann ein Maß M über S wie folgt definiert werden:
$t \in M :\Longleftrightarrow$ es existiert eine widerspruchsfreie Theorie T mit $T \vdash \mathrm{Vb}(t) \cap \Sigma$, so daß für alle $\phi \in \mathrm{Vb}(t)$ gilt: $t(\phi) = 1 \Leftrightarrow T \vdash \phi$ und $t(\phi) = 0 \Leftrightarrow T \vdash \neg\phi$.

Sei f die gemäß Voraussetzung existierende konsistente Funktion und $\Sigma^\star := f^{-1}[\{1\}]$. Es gilt $\Sigma^\star \supseteq \Sigma$, außerdem ist $\Sigma^\star$ widerspruchsfrei. Annahme: $f(\phi) = f(\neg\phi) = 0$ für ein ϕ. Dann folgt $f|\{\phi, \neg\phi\} \in M$, d. h. es existiert eine widerspruchsfreie Theorie T mit $T \vdash \neg\phi$, $T \vdash \neg\neg\phi$. Da dies offensichtlich nicht geht, muß $\Sigma^\star$ maximal widerspruchsfrei sein.

Wie man nun aus einer widerspruchsfreien Theorie Σ ein Modell dieser Theorie konstruiert, möchte ich hier nur grob skizzieren; für einen ausführlichen Beweis schlage man bitte in der Standardliteratur, z. B. [Shoe67], nach. Zu einer Theorie Σ kann man die sogenannte <u>kanonische Struktur</u> wie folgt definieren: Man nimmt o. B. d. A. an, daß Σ mindestens ein Konstantensymbol enthält, und bildet zunächst die Menge T aller variablenfreien Terme über $\mathcal{L}(\Sigma)$. Auf T wird mittels $t_1 \sim t_2 :\Longrightarrow \Sigma \vdash t_1 = t_2$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Man kann zeigen, daß $\sim$ sogar eine Kongruenzrelation ist, und faktorisiert T nach $\sim$ durch. Die Faktorstruktur $T/\!\sim$ ist die kanonische Struktur von Σ. Dieses ist auch das Vorgehen bei der Konstruktion freier Algebren, und man könnte vermuten, daß $T/\sim$ bereits ein Modell von Σ ist. Doch es kann aus Σ

herleitbare Sätze der Form $\exists x\phi(x)$ geben, für die es keinen variablenfreien Term t mit $\Sigma \vdash \phi\binom{x}{t}$ gibt, die also in der kanonischen Struktur nicht gültig sind. Widerspruchsfreie Theorien, bei denen dieses nicht passiert, also bei denen es für jeden herleitbaren Satz der Form $\exists x\phi(x)$ einen Term t mit $\Sigma \vdash \phi\binom{x}{t}$ gibt, heißen Henkintheorien. Für eine vollständige Henkintheorie ist ihre kanonische Struktur dann tatsächlich ein Modell von ihr. Es ist also für Σ eine vollständige Henkintheorie $\Gamma \supseteq \Sigma$ gesucht. Um eine derartige Henkintheorie zu konstruieren, verschafft man sich auf induktive Art und Weise „genügend" viele Konstantensymbole, sogenannte *spezielle Konstantensymbole der Ordnung n*. Seien dazu nun alle speziellen Konstantensymbole der Ordnung $\leq n$ bereits definiert, und sei $\exists x\phi(x)$ ein Satz, der aus derartigen Konstantensymbolen und Zeichen aus $\mathcal{L}(\Sigma)$ gebildet ist. Gilt $n > 0$, so enthalte ϕ weiterhin mindestens ein speziellen Konstantensymbol der Ordnung $n-1$. Dann sei $c_{\exists x\phi(x)}$ ein neues spezielles Konstantensymbol der Ordnung n. Man erweitert nun die Sprache $\mathcal{L}(\Sigma)$ um alle neuen speziellen Konstantensymbole. Ist nun $\exists x\phi(x)$ ein Satz in dieser Sprache, so gehört ein eindeutig bestimmtes neues spezielles Konstantensymbol $c_{\exists x\phi(x)}$ auch zu dieser Sprache. Jetzt erweitert man die Theorie Σ zur Theorie Σ', in dem man Σ alle Sätze der Form $\exists x\phi(x) \Longrightarrow \phi\binom{x}{c_{\exists x\phi(x)}}$ hinzufügt. Man kann zeigen, daß Σ' widerspruchsfrei ist, und es ist Σ' offensichtlich eine Henkintheorie. Sei nun $\Gamma \supseteq \Sigma'$ eine maximal widerspruchsfreie Menge von Sätzen. Wegen $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}(\Sigma_\omega)$ ist auch Γ eine Henkintheorie. Die kanonische Struktur von Γ ist das gesuchte Modell von $\Sigma \subseteq \Gamma$.

„(xv)⇒(xvi)" Da die Rückrichtung der Äquivalenz immer in ZF gilt, ist nur noch die andere Richtung zu zeigen. Es gelte also $T \models \phi$. D. h. aber, daß $T \cup \{\neg\phi\}$ kein Modell besitzt, womit $T \cup \{\neg\phi\}$ nach Voraussetzung syntaktisch widersprüchlich ist. Das ist gleichbedeutend mit $T \vdash \phi$.

„(xvi)⇒(xvii)" Sei T eine Theorie, bei der jede endliche Teilmenge ein Modell besitzt. Dann ist jede endliche Teilmenge und damit auch ganz T syntaktisch widerspruchsfrei, d. h. $T \nvdash \phi \wedge \neg\phi$. Gemäß Voraussetzung gilt auch $T \not\models \phi \wedge \neg\phi$,d. h. es existiert ein Modell $\mathcal{M}$ von $T \cup \{\neg\phi \vee \phi\}$, also insbesondere von T.

„(xvii)⇒(i)" Zuerst wird folgende Behauptung bewiesen:

Seien $n \in \mathbb{N}$, D ein distributiver Verband, I ein Ideal in D, F ein Filter in D mit $I \cap F = \emptyset$ und $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in D$. Dann existiert ein Ideal $I' \supseteq I$ mit $I' \cap F = \emptyset$, für das $\forall i \leq n(a_i \wedge b_i \in I' \Longrightarrow (a_i \in I') \vee (b_i \in I'))$ gilt.

Beweis mit vollständiger Induktion über n:

$n = 1$: Sei o. B. d. A. $a_1 \wedge b_1 \in I$ (sonst ist man mit $I' = I$ fertig). Annahme: Es existieren $f, g \in I$ mit $a_1 \vee f \in F$, $b_1 \vee g \in F$. Dann setzt man $h = f \vee g \in I$ und erhält $a_1 \vee h \in F$, $b_1 \vee h \in F$, also $(a_1 \wedge b_1) \vee h = (a_1 \vee h) \wedge (b_1 \vee h) \in F$ $\sharp$. Also gilt o. B. d. A. $\downarrow \{a_1 \vee i \,|\, i \in I\} \cap F = \emptyset$, d. h. $\downarrow \{a_1 \vee i \,|\, i \in I\}$ ist das gesuchte Ideal.

$n \Rightarrow n+1$: Es seien $a_1, b_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}$ gegeben. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung existiert ein $I' \supseteq I$, für das $\forall i \leq n(a_i \wedge b_i \in I' \Longrightarrow (a_i \in I') \vee (b_i \in I'))$ gilt. Falls $a_{n+1} \wedge b_{n+1} \notin I'$, so ist man fertig. Andernfalls wähle man wie beim Induktionsbeginn ein Ideal $I'' \supseteq I'$ mit $I'' \cap F = \emptyset$, das a_{n+1} oder b_{n+1} enthält. Für I'' und

$a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ wähle man erneut nach Induktionsvoraussetzung ein Ideal $I''' \supseteq I''$, so daß $\forall i \leq n(a_i \wedge b_i \in I'' \Rightarrow (a_i \in I'') \vee (b_i \in I''))$ gilt. Dieses Ideal ist das gesuchte.

Nun betrachte man die Sprache $\mathcal{L}$, die aus den binären Operationssymbolen $\vee, \wedge$, den einstelligen Prädikatensymbolen I, F und den Konstantensymbolen $(c_a)_{a \in D}$ besteht. Sei Th eine Theorie, die die folgenden Sätze enthält:

(i) alle Gleichungen mit Konstanten $c_a, a \in D$, die in D gelten,

(ii) einen Satz, der besagt, daß I ein Ideal und F ein zu I disjunkter Filter ist,

(iii) und alle Sätze der Form $I(c_a)$ für ein $a \in I$ sowie alle Sätze der Form $F(c_a)$ für ein $a \in F$.

Nun definiert man die Theorien $Prim := \{I(c_a \wedge c_b) \Rightarrow I(c_a) \vee I(c_b) | a, b \in D\}$ und $Th' := Th \cup Prim$. Gilt nun $E \subset\subset Prim$, so besitzt $Th \cup E$ nach obiger Behauptung ein Modell. Aufgrund des Kompaktheitssatzes besitzt damit sogar Th' ein Modell $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, I, F, (c_a)_{a \in D})$. Mit $\mathcal{M} \models Prim$ sieht man leicht, daß $P := \{a \in D \,|\, \mathcal{M} \models I(c_a)\}$ das gesuchte Primideal ist (da F nach Voraussetzung nichtleer ist, kann nicht $P = D$ gelten). $\square$

Kapitel 3

Die L-Hierarchie

In diesem Kapitel gehe ich von einer Theorie SP aus, die unter anderem sämtliche Axiome von ZF beinhaltet und in der ein einstelliges Prädikatensymbol S und ein Konstantensymbol b gegeben ist. Die Theorie SP wird vollständig in Kapitel 4 eingeführt, ich brauche hier nur, daß in SP die Aussage $b \subseteq \mathfrak{P}(\omega)$ gilt, und daß die durch S beschriebene Klasse (d. h. die Klasse aller Mengen, für die in SP $S(x)$ herleitbar ist) transitiv ist. Die Aussage $S(x)$ schreibe ich auch als „x ist eine Standardmenge“. Ich möchte nun eine Prozedur angeben, mit der man iterativ Mengen aus b und aus den Standardmengen konstruieren kann, wobei diese Iteration über die Ordinalzahlen durchgeführt wird. Wenn man mit L_α die Menge aller Mengen, die vor dem α-ten Schritt definiert worden sind, bezeichnet, so wird also eine Hierarchie L_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ aufgebaut. Ich möchte erst kurz metasprachlich erwähnen, wie dieser Aufbau vonstatten geht.

Der Anfangs– und der Limesschritt der Iteration werden wie üblich gehandhabt, d. h.:

$L_0 = \emptyset$, $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, sofern α eine Limesordinalzahl ist.

Ist nun α gegeben, so soll $L_{\alpha+1}$ folgende Mengen enthalten:

(i) $\{x|x \in L_\alpha \wedge \phi(x, x_1, x_2, \dots x_n)\}$, wobei $x_1, \dots x_n$ Elemente aus L_α sind und sämtliche Quantoren in ϕ auf L_α eingeschränkt sind,

(ii) die Standardmengen mit Rang $\leq \alpha$,

(iii) die Elemente von b, sofern $\alpha \geq \omega$ gilt, und

(iv) b selber, sofern $\alpha > \omega$ gilt.

Es wird weiterhin $L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L_\alpha$ gesetzt. Wie man an Schritt (i) erkennt, wird bei dieser Konstruktion unter anderem über bestimmte Mengen von Formeln quantisiert. Um die Konstruktion also formal präsize durchführen zu können, muß man dieses Quantisieren über Formeln innerhalb von SP ermöglichen. Um das zu tun, führt man eine innerhalb von SP beschriebene Sprache $\mathcal{L}$ ein. Diese Vorgehensweise, in der man in einer Theorie selber wieder eine Sprache angibt, um formal präzise und nicht nur metasprachlich über gewisse Dinge „reden“ zu können, geht auf Gödel zurück und wird häufig auch als *Gödelisierung* von Formeln bezeichnet. Sie ist inzwischen ein fester Bestandteil der Mengenlehre. Zunächst werden, ähnlich wie bei einem metasprachlichen Aufbau einer formalen Sprache, die Zeichen von $\mathcal{L}$ eingeführt. Da der Aufbau von $\mathcal{L}$ aber in SP geschieht, sind die Zeichen von $\mathcal{L}$ keine metaspachlichen Symbole, sondern bestimmte Mengen. Um dieses Kapitel trotzdem lesbar zu halten, ersetze ich diese Mengen dann im nachhinein durch Symbole.

Definition 3.1 Die Zeichen der Sprache $\mathcal{L}$ sind:

(i) $(0,0)$. Statt $(0,0)$ schreibe ich $\neg$ und nenne es *Negation.*

(ii) $(0,1)$. Statt $(0,1)$ schreibe ich auch $\vee$ und nenne es *Disjunktion.*

(iii) $(0,2)$. Statt $(0,2)$ schreibe ich auch $=$ und nenne es *Identität.*

(iv) $(0,3)$. Statt $(0,3)$ schreibe ich auch $\in$ und nenne es *Elementbeziehung.*

(v) $(1,\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$. Statt $(1,\alpha)$ schreibe ich auch $\exists_\alpha$ und nenne es *eingeschränkten Existenzquantor für* $\alpha \in \mathrm{On}$.

(vi) $(2,\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$. Statt $(2,\alpha)$ schreibe ich auch $\Diamond_\alpha$ und nenne es *eingeschränkten Aussonderungsoperator für* $\alpha \in \mathrm{On}$.

(vii) $(3,i)$ für jedes $i \in \omega$. Statt schreibe ich auch x_i und nenne es *Variable (für* $i \in \omega$*).*

(viii) $(4,s)$ für jede Standardmenge s. Statt $(4,s)$ schreibe ich auch $\mathbf{s}$ und nenne es *Konstantensymbol für die Standardmenge* s.

(ix) $(5,i)$ für jedes $i \in \omega$. Statt $(5,i)$ schreibe ich auch a_i und nenne es *Konstantensymbol (für* $i \in \omega$*).*

(x) $(0,4)$. Statt $(0,4)$ schreibe ich auch $\mathbf{b}$ und nenne es *Konstantensymbol für* b.

Man beachte, daß die Aussage „x ist ein Zeichen von $\mathcal{L}$“ eine Aussage innerhalb von SP ist, also durch eine Formel angegeben werden kann. Diese Formel könnte z. B. wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}&x = (0,0) \vee x = (0,1) \vee x = (0,2) \vee x = (0,3) \vee x = (0,4)\\&\quad \vee (\exists\alpha \in \mathrm{On})(x = (1,\alpha)) \vee (\exists\alpha \in \mathrm{On})(x = (2,\alpha)) \vee \exists s(S(s) \wedge x = (4,s))\\&\quad \vee (\exists i \in \omega)(x = (3,i)) \vee (\exists i \in \omega)(x = (5,i)) \qquad .\end{aligned}$$

Hingegen macht es keinen Sinn, $\mathcal{L}$ als normale metasprachliche Sprache aufzufassen, da es nicht möglich ist, alle Zeichen $\exists_\alpha$, $\Diamond_\alpha$ oder $\mathbf{s}$ „wirklich“ aufzuschreiben. Die Konstruktion von $\mathcal{L}$ ist also eine rein mengentheoretische und keine metasprachliche Konstruktion.

Die naive Bedeutung der Symbole $\exists_\alpha$ und $\Diamond_\alpha$ werde ich später noch erläutern. Die Konstantensymbole a_i werden immer Namen für die Elemente von b sein. Das ist aber *nicht* so zu verstehen, daß ich in meinem Modell von ZF bestimmte Elemente von b schon mit a_i, $i \in \omega$, bezeichnet habe, sondern nur so, daß ich *in der Sprache* $\mathcal{L}$ die Möglichkeit habe, einigen Elementen von b Namen zu geben. Auch dieses wird später noch ausführlicher erläutert werden. Man beachte, daß entgegen den üblichen Konventionen die Menge b und die Elemente a_i von b nicht durch sich selbst, sondern durch einfachere Paare kodiert werden. Der Grund liegt in dem späteren Beweis, daß SP konsistent ist. Dabei wird, grob gesprochen, ein Modell von SP ausgehend von einem „normalen" Modell von ZF konstruiert, in dem ich die exotische Menge b noch nicht zur Verfügung habe. Die Elemente von S, die Standardmengen, werden dann gerade die Elemente des „normalen" Modells, das auch als *Grundmodell* bezeichnet wird, sein. Die ideelle Menge b, die kein Element des Grundmodells sein wird, wird sozusagen zu diesem Grundmodell adjungiert. Prinzipiell ist das ein ähnlicher Vorgang wie z. B. die Adjunktion eines (ideellen) Elementes x zum Körper $\mathbb{Q}$, so daß dann der Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ entsteht. Bei einer derartigen Adjunktion werden Terme aus den Elementen des Ringes und dem Symbol x aufgebaut. Die Entsprechung zu den formalen Termen bei dieser Adjunktion ist hier die formale Sprache $\mathcal{L}$. Da der Aufbau der $L_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$, nun auch in dem Grundmodell von ZF beschreibbar sein muß, in dem die Menge b noch nicht zur Verfügung steht, wird b in der Sprache $\mathcal{L}$ durch die einfache Menge $(0, 4)$ kodiert. Es ist damit die Sprache $\mathcal{L}$ in ZF beschreibbar, so daß ich *in* ZF für jedes Element des größeren Modelles einen Namen habe.

Definition 3.2 Bestimmte endliche Folgen von Zeichen der Sprache $\mathcal{L}$ möchte ich nun mit *Term, Aussonderungsterm* oder *Formel* bezeichnen. Dabei sind die Aussagen „x ist ein Term", „x ist ein Aussonderungsterm" und „x ist eine Formel" genau wie die Aussage „x ist ein Zeichen von $\mathcal{L}$" keine metasprachlichen Aussagen, sondern Aussagen innerhalb von SP. Diese Definitionen werden simultan und gleichzeitig mit einer Funktion λ, die auf den Termen, den Variablen x_i und den Formeln definiert wird, induktiv durchgeführt:

(i) u ist ein <u>Term</u> genau dann, wenn u eines der Konstantensymbole $\mathbf{s}$ (bzw., um es ganz präzise auszudrücken, die eingliedrige Folge $\{(0, \mathbf{s})\}$), eines der a_i für ein $i \in \omega$, b oder ein Aussonderungsterm ist. Man beachte, daß die Variablen x_i *nicht* als Terme definiert werden! Die hier definierten Terme werden andernorts auch *konstante Terme* oder, noch passender, *Namen* genannt.

(ii) $\lambda(\mathbf{s}) = \rho(s)$ siehe Definition 1.5 (x) , $\lambda(a_i) = \omega$, $\lambda(b) = \omega + 1$, $\lambda(x_i) = 0$.

(iii) Seien ϕ und ψ Formeln. Dann sind auch $\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ und $\exists_\alpha x_i \phi(x_i)$ Formeln. Formal gesehen ist $\neg\phi$ die Folge, die durch Hintereinanderfügen der Folgen $\neg$ und ϕ entsteht, $\phi \vee \psi$ ist die Folge, die durch Hintereinanderfügen von $\vee$, ϕ und ψ entsteht, und $\exists_\alpha x_i \phi(x_i)$ ist die Folge, die durch Hintereinanderfügen von $\exists_\alpha$, x_i und ϕ entsteht. Man beachte, daß durch die Wahl der Reihenfolge bei $\phi \vee \psi$ die Formeln trotz des Verzichtes auf Klammern immer noch eindeutig lesbar sind (dieses wäre nicht der Fall, wenn $\phi \vee \psi$ durch Hintereinanderfügen von ϕ, $\vee$ und ψ entstehen würde). Es wird nun $\lambda(\neg\phi) = \lambda(\phi)$, $\lambda(\phi \vee \psi) = \max\{\lambda(\phi), \lambda(\psi)\}$

und $\lambda(\exists_\alpha x_i \phi(x_i)) = \max\{\alpha, \lambda(\phi)\}$ gesetzt. $\exists_\alpha x_i \phi(x_i)$ wird dabei intuitiv als „es existiert ein x_i in L_α mit $\phi(x_i)$“ interpretiert.

(iv) Seien u und v Terme oder Variablen. Dann sind $u \in v$ und $u = v$ Formeln, und es wird $\lambda(u \in v) = \lambda(u = v) = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\} + 1$ gesetzt. Hier ist es egal, wie man $u \in v$ bzw. $u = v$ formal definiert, die eindeutige Lesbarkeit von Formeln ist auf jeden Fall gewährleistet.

(v) Sei $\phi(x_i)$ eine Formel mit der einzigen freien Variablen x_i und mit $\lambda(\phi) \leq \alpha$. Dann wird $\diamondsuit_\alpha x_i \phi(x_i)$ <u>Aussonderungsterm</u> genannt, und es wird $\lambda(\diamondsuit_\alpha x_i \phi(x_i)) = \alpha$ gesetzt. $\diamondsuit_\alpha x_i \phi(x_i)$ soll intuitiv „die Menge aller x_i in L_α mit $\phi(x_i)$“ bedeuten.

Diese Definition ist formal gesehen eine Definition mittels Induktion über den Aufbau der Ausdrücke. Wenn man also für eine endliche Folge ϕ von Zeichen aus $\mathcal{L}$ entscheiden will, ob sie ein Term oder eine Formel ist, so steht dieses bereits für jede endliche echte Teilfolge von ϕ fest, ebenso wie auf den Teilformeln oder Teiltermen von ϕ bereits die Funktion λ definiert ist. Man stellt weiterhin fest, daß $\lambda(\phi)$ für eine Formel ϕ die kleinste Ordinalzahl α ist, so daß $\alpha \geq \beta$ für jede Ordinalzahl β, für die ein Existenzquantor $\exists_\beta$ in ϕ auftritt, gilt, und die $\alpha > \lambda(u)$ für jeden in ϕ auftretenden Term u erfüllt. Schließlich wird, wie allgemein üblich, $\phi \wedge \psi$ als Abkürzung für $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ angesehen; $\phi \Longrightarrow \psi$ und $\phi \Longleftrightarrow \psi$ werden ähnlich behandelt. Auch die Klammern dienen nur der Verbesserung der Lesbarkeit und sind kein Bestandteil der Sprache $\mathcal{L}$. Weiterhin sei nun $\forall_\alpha x_i \phi(x_i)$ eine Abkürzung für $\neg\exists_\alpha x_i \neg\phi(x_i)$. Man sieht leicht, daß $\lambda(\forall_\alpha x_i \phi(x_i)) = \max\{\alpha, \lambda(\phi)\}$ und $\lambda(\phi \wedge \psi) = \lambda(\phi \Longrightarrow \psi) = \lambda(\phi \Longleftrightarrow \psi) = \max\{\lambda(\phi), \lambda(\psi)\}$ gilt.

Definition 3.3 Formeln ohne freie Variablen werden <u>Sätze</u> genannt. Die Klasse (sie ist auch eine echte Klasse, sofern S eine echte Klasse ist) aller Formeln aus $\mathcal{L}$ wird mit <u>*FL*</u>, die Klasse aller Terme aus $\mathcal{L}$ wird mit <u>*TL*</u> bezeichnet. Ein <u>Ausdruck</u> aus $\mathcal{L}$ ist eine Variable, ein Term oder eine Formel. Ein Ausdruck ohne freie Variablen ist ein <u>geschlossener Ausdruck</u>. Für einen Ausdruck ϕ ist <u>$\mathtt{occ}(\phi)$</u> $\subseteq \omega$ die Menge aller Indizes i, für die das Konstantensymbol a_i in ϕ auftritt. Ist s eine Abbildung auf einer endlichen Teilmenge von ω nach ω mit $\mathrm{Vb}(s) \supseteq \mathtt{occ}(\phi)$, so wird s als <u>Substitutionsabbildung für ϕ</u> bezeichnet. Dann ist <u>$\mathtt{sub}(\phi, s)$</u> der Ausdruck, der entsteht, indem man in ϕ jedes Vorkommen eines a_i durch $a_{s(i)}$ ersetzt.

Ich werde im folgenden für die Ausdrücke der Sprache $\mathcal{L}$ kleine griechische Buchstaben wie ϕ und ψ sowie kleine lateinische Buchstaben wie u und v benutzen. Dabei werden die griechischen Buchstaben normalerweise Elemente aus *FL* und die lateinischen Buchstaben immer Elemente aus *TL* bezeichnen. Nur in einigen wenigen Fällen, so zum Beispiel in der nächsten Definition, werden die griechischen Buchstaben für alle Ausdrücke, sowohl Terme als auch Formeln stehen. Formeln und Sätze der Theorie von ZF dagegen werden im folgenden durch große griechische Buchstaben wie Φ und Ψ bezeichnet. Man beachte, daß nun einige Symbole eine doppelte Bedeutung haben, je nachdem, in welcher Sprache sie benutzt werden. So steht $\in$ sowohl für die normale Elementbeziehung von ZF als auch für das Paar $(0, 3)$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Welche Bedeutung eines Symboles gerade zum Tragen kommt, sollte allerdings immer aus dem jeweiligen Kontext klar werden. Schließlich werde ich Aussagen wie „sei ϕ die Formel $u = v$“ nicht durch die zwar korrekte, aber verwirrende Schreibweise „sei $\phi = u = v$ “ (wobei das linke Gleichheitszeichen die Identität in ZF und das rechte Gleichheitszeichen das Paar $(0, 2)$ ist) notieren, sondern zum Vergleich von Formeln häufig das Zeichen $\equiv$ benutzen. Die obige Aussage werde ich also als „sei $\phi \equiv u = v$“ aufschreiben.

Definition 3.4 Ich habe bereits angedeutet, daß die Terme Namen von Mengen sein sollen, d. h. ich möchte für jeden Term u eine durch u bezeichnete Menge x bestimmen. In u werden aber im allgemeinen diverse a_i's auftreten, von denen man nicht weiß, für welche Elemente aus b sie stehen. Aus diesem Grunde werden Funktionen f eingeführt, deren Vorbereich endliche Teilmengen von ω sind und deren Werte in b liegen. Derartige Funktionen werden Belegungen genannt. Ist für einen Ausdruck ϕ und eine Belegung f dann $\mathtt{occ}(\phi) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$ erfüllt, so ist f eine hinreichende Belegung für ϕ. In diesem Fall kann man sozusagen ϕ auswerten, in dem man die in ϕ auftretenden a_i's als $f(i)$ interpretiert. Um diesen Ansatz zu präzisieren, wird eine Funktion $\mathtt{den}(\phi, f)$ auf allen geschlossenen Ausdrücken und ihren hinreichenden Belegungen definiert. Es reicht leider nicht, $\mathtt{den}(u, f)$ nur auf den Termen und den dazugehörigen Belegungen definieren zu wollen, da in den Aussonderungstermen ja Formeln auftauchen, die auch ausgewertet werden müssen. Für eine Formel ϕ soll allerdings $\mathtt{den}(\phi, f)$ natürlich keine Menge, sondern einen Wahrheitswert, d. h. „wahr“ oder „falsch“, ergeben. Dabei wird 0 für „falsch“ und 1 für „wahr“ gewählt.

Über den Aufbau der geschlossenen Ausdrücke ϕ wird nun $\mathtt{den}(\phi, f)$ definiert.

(i) $\mathtt{den}(\mathbf{s}, f) = s$

(ii) $\mathtt{den}(a_i, f) = f(i)$

(iii) $\mathtt{den}(b, f) = b$ (dabei ist das das linke b das Paar (0,4) und das rechte b eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(\omega)$)

(iv) Seien u und v Terme. Dann sei

$$\begin{aligned} \mathtt{den}(u \in v, f) &= 1 \quad \text{falls } \mathtt{den}(u, f) \in \mathtt{den}(v, f) \text{ gilt} \\ &= 0 \quad \text{sonst} \\ \mathtt{den}(u = v, f) &= 1 \quad \text{falls } \mathtt{den}(u, f) = \mathtt{den}(v, f) \text{ gilt} \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

(v) $\mathtt{den}(\neg\phi, f) = 1 - \mathtt{den}(\phi, f)$, $\mathtt{den}(\phi \vee \psi, f) = \max\{\mathtt{den}(\phi, f), \mathtt{den}(\psi, f)\}$

(vi) $\mathtt{den}(\exists_\alpha x_i \phi(x_i), f) = 1$ falls es einen Term v mit $\lambda(v) < \alpha$ und eine hinreichende Belegung g für $\phi(v)$ gibt mit $g|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) = f|\mathtt{occ}(\phi(x_i))$ und $\mathtt{den}(\phi(v), g) = 1$ (wobei $\phi(v)$ die Formel ist, die man aus $\phi(x_i)$ erhält, indem man alle freien Vorkommen von x_i durch v ersetzt)

$= 0$ sonst

(vii) $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f) = \{\mathtt{den}(v, g) \mid \lambda(v) < \alpha \wedge g$ ist eine hinreichende Belegung für $\phi(v) \wedge g|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) = f|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) \wedge \mathtt{den}(\phi(v), g) = 1\}$

Diese Definition von den ist nicht einfach über Induktion über den Aufbau von geschlossenen Ausdrücken geführt, wie man bei $\exists_\alpha$ und $\Diamond_\alpha$ erkennen kann. Um z. B. $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ bestimmen zu können, muß man bereits $\mathtt{den}(\psi, g)$ für jeden geschlossenen Ausdruck ψ mit $\lambda(\psi) < \alpha$ und jede Belegung g mit $g|\mathtt{occ}(\psi) = f|\mathtt{occ}(\phi(x_i))$ kennen. Also ist die Definition so zu verstehen, daß zuerst eine Induktion über $\lambda(\psi)$ durchgeführt wird und erst dann eine Induktion über den Aufbau der Ausdrücke. Desweiteren wird die Definition simultan für alle Belegungen f gleichzeitig durchgeführt. Wenn ich also im folgenden von einer „Induktion über den Aufbau von den“ spreche, so ist das im eben erklärten Sinn zu verstehen.

Definition 3.5 L_α kann man nun in ZF syntaktisch exakt wie folgt definieren:

$$L_\alpha := \{\mathtt{den}(u, f) \mid u \in TL \wedge \lambda(u) < \alpha \wedge f \text{ ist eine hinreichende Belegung für } u\}$$

Sei nun $\phi(x_i)$ eine Formel aus $\mathcal{L}$ und f eine hinreichende Belegung für ϕ. Dann wird durch $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ offensichtlich eine bestimmte (von ϕ und f abhängige) Teilmenge aus L_α ausgesondert (ich hoffe, daß damit auch meine Übersetzung „Aussonderungsterm“ des englischen Originalworts „abstraction term“ gerechtfertigt erscheint). Ist nun $x = \mathtt{den}(v, g)$ ein Element von L_α und gilt $g|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) = f|\mathtt{occ}(\phi(x_i))$, so kann man offensichtlich einfach entscheiden, ob x ein Element von $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ ist. Dieses ist genau dann der Fall, wenn $\phi(v)$ gültig ist (d. h. es gilt $\mathtt{den}(\phi(v), h) = 1$, wobei h die Belegung ist mit $h(i) = f(i)$ für jedes $i \in \mathtt{occ}(\phi(x_i))$ und $h(i) = g(i)$ sonst). Ist nun aber $x = \mathtt{den}(v, g)$ ein Element aus L_α mit $g|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) \neq f|\mathtt{occ}(\phi(x_i))$, so ist aus der Definition der Menge $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ nicht ersichtlich, ob x zu dieser Menge gehört oder nicht. Es zeigt sich aber, daß man die in v auftretenden a_i's ersetzen kann, um einen neuen Term v' und eine neue Belegung g' zu erhalten, die $\mathtt{den}(v', g') = \mathtt{den}(v, g)$ und $g'|\mathtt{occ}(\phi(x_i)) = f|\mathtt{occ}(\phi(x_i))$ erfüllen. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Korollar 3.9. Somit kann man nun auch entscheiden, ob x zu $\mathtt{den}(\Diamond_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ gehört. Analog kann man natürlich auch bei $\mathtt{den}(\exists_\alpha x_i \phi(x_i), f)$ vorgehen. Insgesamt gesehen verursachen die verschiedenen Belegungen an dieser Stelle keine prinzipiellen Probleme.

Mit der Definition von L_α zeigt sich weiterhin, daß $\lambda(u) = \alpha$ für einen Term $u \in TL$ bedeutet, daß u ein Element aus $L_{\alpha+1}$ bezeichnet. Für eine Formel $\phi \in FL$ bedeutet $\lambda(\phi) = \alpha$, daß sich ϕ nur auf Elemente von L_α bezieht. Schließlich erkennt man, daß sich der Aufbau der L_α zumindest bei den ersten ω Schritten nicht von der von Neumannschen Hierarchie unterscheidet, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.6 *Es gilt $\rho(\mathtt{den}(u, g)) \leq \lambda(u)$ für jeden Term u mit $\lambda(u) < \omega$ und jede Belegung g. Andererseits existiert für jedes $w \in R_\omega$ ein Term u und eine Belegung g mit $w = \mathtt{den}(u, g)$ und $\lambda(u) \leq \rho(w)$. Damit gilt insbesondere $L_\alpha = R_\alpha$ für jedes $\alpha \in \omega$.*

Beweis: Da im Lemma nur Terme u mit $\lambda(u) < \omega$ betrachtet werden, gibt es in diesen Termen keine Vorkommen eines a_i oder b. Damit ist für jeden hier auftretenden Term bereits $f = \emptyset$ eine hinreichende Belegung und ich werde mich im Beweis auch auf f beschränken.

Die erste Aussage beweist man „straightforward“ mittels vollständiger Induktion über $\lambda(u)$:
$\lambda(u) = 0$: Dieses ist nur möglich für $u = \emptyset$ (ich setzte hier die leere Menge mit ihrem Konstantensymbol gleich) oder für $u = \Diamond_0 x\phi(x)$. In beiden Fällen ergibt sich $\mathtt{den}(u, f) = \emptyset$, also $\rho(\mathtt{den}(u, f)) = 0$.
$\lambda(u) = i + 1$: Im Fall $u = \mathbf{s}$ für ein Konstantensymbol $\mathbf{s}$ ist die Aussage klar. Sei also $u = \Diamond_{i+1} x\phi(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathtt{den}(u, f) &= \{\mathtt{den}(v, f) \mid \lambda(v) \leq i \wedge \mathtt{den}(\phi(v), f) = 1\} \\ &\overset{\mathrm{IV}}{\subseteq} \{\mathtt{den}(v, f) \mid \rho(\mathtt{den}(v, f)) \leq i \wedge \mathtt{den}(\phi(v), f) = 1\} \\ &\subseteq R_{i+1}\,.\end{aligned}$$

Also gilt $\rho(\mathtt{den}(u, f)) \leq i + 1 = \lambda(u)$.
Die zweite Aussage des Satzes wird mit Induktion über $\rho(w)$ bewiesen:
$\rho(w) = 0$: Dann ist $w = \emptyset$. Man setze $u = \Diamond_0 x(x = x)$.
$\rho(w) = i + 1$: Sei $w = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Dann folgt $\rho(w_1) \leq i, \ldots, \rho(w_n) \leq i$, womit nach Induktionsvoraussetzung Terme $u_1, \ldots, u_n$ existieren mit $\lambda(u_1) \leq i, \ldots, \lambda(u_n) \leq i$ und $w_1 = \mathtt{den}(u_1, f), \ldots, w_n = \mathtt{den}(u_n, f)$. Setze $u := \Diamond_{i+1} x(x = u_1 \vee \ldots \vee x = u_n)$. u erfüllt offensichtlich die geforderten Eigenschaften.
Die letzte Aussage des Lemmas, $L_\alpha = R_\alpha$ für jedes $\alpha < \omega$ folgt jetzt unmittelbar aus der Definition der L_α. □

Wie ich bereits erwähnte, wird später in dieser Arbeit die Konsistenz der Theorie SP (die ich im nächsten Kapitel einführe) dadurch bewiesen, daß ein Standardmodell von ZF zu einem größeren Modell von SP erweitert wird, indem man die Menge b adjungiert. In dem größen Modell findet man dann das alte Modell als die Klasse S der Standardmengen wieder. Mit diesem Hintergrund scheint es einfach zu sein, zu jeder Menge x mit $\rho(x) < \omega$ einen Namen zu finden: Man wählt einfach $\mathbf{x}$. Doch daß diese Vorgehensweise legitim ist, ist an dieser Stelle aus mehreren Gründen überhaupt nicht klar. Stattdessen wird der Beweis des Lemmas nicht in ZF, wo die eben dargestellte Argumentation stattfinden würde, geführt, sondern in SP. Man braucht auch die Gültigkeit des Lemmas in SP, und das Lemma wird auch vor dem Konsistenzbeweis von SP benötigt, so z. B. in Lemma 3.11. Ich kann nicht erwarten, daß der Leser hier schon alles nachvollziehen kann, was ich darzustellen versuche, aber diese Ausführungen werden später in dieser Arbeit noch klarer werden. Die Autoren Halpern und Lévy haben es aber leider versäumt, die in dem Lemma aufgeführten Aussagen in ihrer Arbeit [HaLé71] zu erwähnen, obwohl sie sie meines Erachtens benötigten und benutzten. Ich denke also, daß es sich hier um eine der wenigen kleinen Lücken in ihrer hervorragenden Arbeit handelt.

Nun ist es an der Zeit, einige Lemmata zu beweisen, deren Aussagen nicht überraschen, aber für das Arbeiten mit den oben definierten Begriffen notwendig sind.

Lemma 3.7 *Sei ϕ ein geschlossener Ausdruck und seien f, g hinreichende Belegungen für ϕ mit $f|\mathtt{occ}(\phi) = g|\mathtt{occ}(\phi)$. Dann folgt $\mathtt{den}(\phi, f) = \mathtt{den}(\phi, g)$.*

Beweis: „straightforward" mittels Induktion über den Aufbau von $\mathtt{den}$. □

Das nächste Lemma ist zwar intuitiv einsichtig, leider entpuppt sich der Beweis aber als recht technisch ...

Lemma 3.8 *Seien ϕ ein geschlossener Ausdruck und s eine Substitutionsabbildung für ϕ. Dann folgt*

$$\mathtt{den}(\phi, f \circ s) = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(\phi, s), f)$$

für jede für $\mathtt{sub}(\phi, s)$ hinreichende Belegung f, also insbesondere für jede Belegung f mit $\mathrm{Vb}(f) \supseteq \mathrm{Nb}(s)$.

Beweis: Der Beweis wird mittels Induktion über den Aufbau von $\mathtt{den}$ geführt. Ich nehme an, daß für eine feste Ordinalzahl α die Aussage des Lemmas bereits für alle geschlossenen Ausdrücke ψ mit $\lambda(\psi) < \alpha$ bewiesen ist. Nun wird die Aussage für alle geschlossenen Ausdrücke ϕ mit $\lambda(\phi) = \alpha$ mittels Induktion über den formalen Aufbau der Ausdrücke geführt. An keiner Stelle des Beweises geht die Einschränkung ein, daß bei Aussonderungstermen $\Diamond_\alpha x_i \psi(x_i)$ die Bedingung $\lambda(\psi(x_i)) \leq \alpha$ gelten muß. Daß diese Einschränkung nirgendwo benutzt wird, werde ich an einer Stelle des Beweises benötigen.

(i) $\phi \equiv \mathbf{t}$ für ein Konstantensymbol $\mathbf{t}$. Dann folgt:

$$\mathtt{den}(\mathbf{t}, f \circ s) = \mathbf{t} = \mathtt{den}(\mathbf{t}, f) = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(\mathbf{t}, s), f)\,.$$

(ii) $\phi \equiv a_i$ (dieser Schritt ist nur bei $\alpha = \omega$ nötig). Es folgt:

$$\mathtt{den}(a_i, f \circ s) = (f \circ s)(i) = f(s(i)) = \mathtt{den}(a_{s(i)}, f) = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(a_i, s), f)\,.$$

(iii) $\phi \equiv b$ (dieser Schritt ist nur bei $\alpha = \omega + 1$ nötig). Es folgt:

$$\mathtt{den}(b, f \circ s) = b = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(b, s), f)\,.$$

(iv) $\phi \equiv \Diamond_\alpha x \psi(x)$. Dieses ist der schwierigste Fall. Seien

$$\begin{aligned} P &= \mathtt{den}(\phi, f \circ s) \\ &= \{\mathtt{den}(v, h) \mid \lambda(v) < \alpha \wedge \mathrm{Vb}(h) \supseteq \mathtt{occ}(\psi(v)) \\ &\qquad \wedge h|\mathtt{occ}(\psi(x)) = (f \circ s)|\mathtt{occ}(\psi(x)) \wedge \mathtt{den}(\psi(v), h) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q &= \mathtt{den}(\mathtt{sub}(\phi, s), f) \\ &= \{\mathtt{den}(v', h') \mid \lambda(v') < \alpha \wedge \mathrm{Vb}(h') \supseteq \mathtt{occ}(\psi'(v')) \\ &\qquad \wedge h'|\mathtt{occ}(\psi'(x)) = f|\mathtt{occ}(\psi'(x)) \wedge \mathtt{den}(\psi'(v'), h') = 1\} \end{aligned}$$

mit $\psi'(x) = \mathtt{sub}(\psi(x), s)$.

Es ist also $P = Q$ zu zeigen.

(i) „$P \subseteq Q$“ Sei also $w = \mathtt{den}(v, h) \in P$, es ist $w \in Q$ zu zeigen. Sei t eine Substitutionsabbildung für $\psi(v)$, so daß t mit s auf $\mathtt{occ}(\psi(x))$ übereinstimmt und $t|(\mathtt{occ}(v) \setminus \mathtt{occ}(\psi(x)))$ eine bijektive Abbildung auf eine Menge $d \subseteq \omega$ mit $d \cap s[\mathtt{occ}(\psi(x))] = \emptyset$ ist. Damit sieht t so aus:

$$\mathrm{Vb}(t) \quad \begin{array}{rcl} \mathtt{occ}(\psi(x)) & \xrightarrow{t = s} & s[\mathtt{occ}(\psi(x))] \\ \mathtt{occ}(v) \setminus \mathtt{occ}(\psi(x)) & \xrightarrow{t} & d \end{array} \quad \mathrm{Nb}(t)$$

Sei nun h' eine Belegung, die mit f auf $t[\mathtt{occ}(\psi(x))] = s[\mathtt{occ}(\psi(x))]$ übereinstimmt und die

$$h' \circ t|(\mathtt{occ}(v) \setminus \mathtt{occ}(\psi(x))) = h|(\mathtt{occ}(v) \setminus \mathtt{occ}(\psi(x))) \tag{3.1}$$

erfüllt. Daß es ein derartiges h' geben muß, kann man leicht an der Skizze erkennen. Da weiterhin s und t auf $\mathtt{occ}(\psi(x))$ und auch h' und f auf $t[\mathtt{occ}(\psi(x))]$ übereinstimmen, folgt nun

$$h' \circ t|\mathtt{occ}(\psi(x)) = f \circ s|\mathtt{occ}(\psi(x)) = h|\mathtt{occ}(\psi(x))\,. \tag{3.2}$$

Gemäß (3.1) und (3.2) stimmen also $h' \circ t$ und h auf ganz $\mathtt{occ}(\psi(v))$ überein, und da $\mathtt{den}(\psi(v), h) = 1$ gilt, erhält man nun

$$\mathtt{den}(\psi(v), h' \circ t) = 1\,. \tag{3.3}$$

Nun wird $v' := \mathtt{sub}(v, t)$ gesetzt. Da s und t auf $\mathtt{occ}(\psi(x))$ übereinstimmen, folgt $\mathtt{sub}(\psi(x), t) = \mathtt{sub}(\psi(x), s) = \psi'(x)$ und damit auch $\mathtt{sub}(\psi(v), t) = \psi'(v')$. Ich möchte nun zeigen, daß v' und h' die Vorraussetzungen von Q erfüllen.

Offensichtlich gilt $\lambda(v') = \lambda(v) < \alpha$. Es gilt auch

$$\begin{aligned} \mathrm{Vb}(h') &\supseteq t[\mathtt{occ}(\psi(x))] \cup t[\mathtt{occ}(v) \setminus \mathtt{occ}(\psi(x))] \\ &= t[\mathtt{occ}(\psi(x)) \cup \mathtt{occ}(v)] \\ &= t[\mathtt{occ}(\psi(v))] \\ &= \mathtt{occ}(\psi'(v'))\,. \end{aligned}$$

Da $\mathtt{occ}(\psi'(x)) = s[\mathtt{occ}(\psi(x))]$ gilt, folgt weiterhin $h'|\mathtt{occ}(\psi'(x)) = f|\mathtt{occ}(\psi'(x))$. Schließlich erhält man gemäß Induktionsvoraussetzung aus (3.3) auch die letzte Bedingung $\mathtt{den}(\psi'(v'), h') = 1$. Mit (3.1) und (3.2) sowie Lemma 3.7 erhält man jetzt

$$w = \mathtt{den}(v, h) = \mathtt{den}(v, h' \circ t) \overset{\mathrm{IV}}{=} \mathtt{den}(\mathtt{sub}(v, t), h') = \mathtt{den}(v', h') \in Q\,.$$

(ii) „$Q \subseteq P$“ Sei $w = \mathtt{den}(v', h') \in Q$, es ist $w \in P$ zu zeigen. Sei t eine Substitutionsabbidung, die mit s auf $\mathtt{occ}(\psi(x))$ übereinstimmt und für die eine endliche

Menge $d \subseteq \omega$ mit $d \cap \texttt{occ}(\psi(x)) = \emptyset$ gewählt ist, so daß $t|d$ eine bijektive Abbildung von d auf $\texttt{occ}(v') \setminus \texttt{occ}(\psi'(x'))$ ist und $\mathrm{Vb}(t) = \texttt{occ}(\psi(x)) \cup d$ gilt. t sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{cccccc} & \texttt{occ}(\psi(x)) & \xrightarrow{t=s} & s[\texttt{occ}(\psi(x))] = \texttt{occ}(\psi'(x)) & \\ \mathrm{Vb}(t) & & & & \mathrm{Nb}(t) \\ & d & \xrightarrow{t} & \texttt{occ}(v') \setminus \texttt{occ}(\psi'(x')) & \end{array}$$

Wegen $\texttt{occ}(v') \subseteq \mathrm{Nb}(t)$ existiert ein Term v mit $v' = \texttt{sub}(v,t)$. Anhand der Skizze erkennt man, daß $\mathrm{Vb}(t) = \texttt{occ}(\psi(x)) \cup \texttt{occ}(v) = \texttt{occ}(\psi(v))$ und $\mathrm{Nb}(t) = \texttt{occ}(\texttt{sub}(\psi(v),t) = \texttt{occ}(\psi'(v'))$ gelten. Da nun auch $\mathrm{Vb}(h') \supseteq \texttt{occ}(\psi'(v')) = \mathrm{Nb}(t)$ gilt, kann man jetzt $h := h' \circ t$ definieren. Ich möchte nun zeigen, daß v und h die Voraussetzungen von P erfüllen.

$\lambda(v) = \lambda(v') < \alpha$ ist klar. Es gilt auch $\mathrm{Vb}(h) = \mathrm{Vb}(h' \circ t) = \mathrm{Vb}(t) = \texttt{occ}(\psi(v))$. Da s und t auf $\texttt{occ}(\psi(x))$ und auch h' und f auf $s[\texttt{occ}(\psi(x))] = \texttt{occ}(\psi'(x))$ übereinstimmen, erhält man weiterhin

$$h|\texttt{occ}(\psi(x)) = h' \circ t|\texttt{occ}(\psi(x)) = f \circ s|\texttt{occ}(\psi(x))\,.$$

Schließlich folgt mittels der Induktionsvoraussetzung die letzte Bedingung

$$\texttt{den}(\psi(v),h) = \texttt{den}(\psi(v),h' \circ t) \overset{\text{IV}}{=} \texttt{den}(\texttt{sub}(\psi(v),t),h') = \texttt{den}(\psi'(v'),h') = 1\,.$$

Somit erhält man nun

$$w = \texttt{den}(v',h') = \texttt{den}(\texttt{sub}(v,t),h') \overset{\text{IV}}{=} \texttt{den}(v,h' \circ t) = \texttt{den}(v,h) \in P\,.$$

(v) $\phi \equiv u \in v$. Es folgt:

$$\begin{array}{rl} & \texttt{den}(u \in v, f \circ s) = 1 \\ \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} & \texttt{den}(u, f \circ s) \in \texttt{den}(v, f \circ s) \\ \overset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow} & \texttt{den}(\texttt{sub}(u,s),f) \in \texttt{den}(\texttt{sub}(v,s),f) \\ \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} & \texttt{den}(\texttt{sub}(u,s) \in \texttt{sub}(v,s),f) = 1 \\ \Longleftrightarrow & \texttt{den}(\texttt{sub}(u \in v,s),f) = 1 \end{array}$$

Analog wird $\phi \equiv u = v$ behandelt.

(vi) $\phi \equiv \neg\psi$. Es folgt:

$$\begin{array}{rcccl} \texttt{den}(\neg\psi, f \circ s) & \overset{\text{Def.}}{=} & 1 - \texttt{den}(\psi, f \circ s) & \overset{\text{IV}}{=} & 1 - \texttt{den}(\texttt{sub}(\psi,s),f) \\ & \overset{\text{Def.}}{=} & \texttt{den}(\neg\texttt{sub}(\psi,s),f) & = & \texttt{den}(\texttt{sub}(\neg\psi,s),f)\,. \end{array}$$

Analog wird $\phi \equiv \psi \vee \chi$ behandelt.

(vii) Den Fall $\phi \equiv \exists_\alpha x\psi(x)$ schließlich kann man genau wie den Fall $\phi \equiv \diamondsuit_\alpha x\psi(x)$ beweisen oder ihn auch in allerdings nicht ganz korrekter Weise darauf zurückführen. Letzteres will ich hier tun. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & \mathtt{den}(\exists_\alpha x\psi(x), f \circ s) = 1 \\ \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}\ & \mathtt{den}(\diamondsuit_\alpha x\psi(x), f \circ s) \neq \emptyset \\ \overset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow}\ & \mathtt{den}(\mathtt{sub}(\diamondsuit_\alpha x\psi(x), s), f) \neq \emptyset \\ \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}\ & \mathtt{den}(\mathtt{sub}(\exists_\alpha x\psi(x), s), f) = 1 \end{aligned}$$

Diese Äquivalenzen sind deshalb nicht ganz korrekt, weil in der Formel $\diamondsuit_\alpha x\psi(x)$ im Gegensatz zur Formel $\exists_\alpha x\psi(x)$ eigentlich die Bedingung $\lambda(\psi(x)) \leq \alpha$ gelten muß. Wie aber zu Beginn des Beweises erwähnt, wird diese Bedingung nirgends im Beweis benutzt, so daß man im Beweis vorübergehend auf diese Einschränkung verzichtet. Das Lemma gilt dann natürlich erst recht für die „richtige" Definition von $\diamondsuit_\alpha x\psi(x)$. □

Korollar 3.9 *Seien f und g Belegungen mit* $\mathrm{Nb}(f) \subseteq \mathrm{Nb}(g)$ *und u ein Term mit* $\mathtt{occ}(u) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$. *Dann existiert ein Term v mit* $\mathtt{occ}(v) \subseteq \mathrm{Vb}(g)$, $\mathtt{den}(v, g) = \mathtt{den}(u, f)$ *und* $\lambda(u) = \lambda(v)$.

Beweis: Sei s eine Substitutionsabbildung mit $\mathrm{Vb}(s) = \mathrm{Vb}(f)$, $\mathrm{Nb}(s) \subseteq \mathrm{Vb}(g)$ und $g \circ s = f$ und sei $v := \mathtt{sub}(u, s)$. Offensichtlich gilt $\mathtt{occ}(v) \subseteq \mathrm{Nb}(s) \subseteq \mathrm{Vb}(g)$ und $\lambda(u) = \lambda(v)$. Aus Lemma 3.8 erhält man

$$\mathtt{den}(v, g) = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(u, s), g) = \mathtt{den}(u, g \circ s) = \mathtt{den}(u, f) \quad ,$$

was zu zeigen war. □

Korollar 3.10 *Seien $x_1, \ldots, x_n \in L_\delta$ für eine Ordinalzahl δ. Dann existieren Terme $u_1, \ldots, u_n$ mit $\lambda(u_i) < \delta$ und eine gemeinsame Belegung f mit* $\mathtt{occ}(u_i) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$ *und* $x_i = \mathtt{den}(u_i, f)$ *für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Beweis: Für $x_1, \ldots, x_n \in L_\delta$ existieren Terme v_i mit $\lambda(v_i) < \delta$ und Belegungen g_i mit $x_i = \mathtt{den}(v_i, g_i)$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seien s_i bijektive Substitutionsabbildungen für die v_i mit paarweise verschiedenen Bildbereichen. Setzt man nun $u_i := \mathtt{sub}(v_i, s_i)$, $h_i := g_i \circ s_i^{-1}$ und $f := \bigcup_{i=1}^n h_i$, so erhält man mit Lemma 3.8 für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ nun

$$\mathtt{den}(u_i, f) = \mathtt{den}(\mathtt{sub}(v_i, s_i), f) = \mathtt{den}(v_i, f \circ s_i) = \mathtt{den}(v_i, g_i) = x_i \ . \qquad □$$

Lemma 3.11 *(i) Seien u ein Term, f eine hinreichende Belegung für u und sei* $y \in \mathtt{den}(u, f)$. *Dann gibt es einen Term v und eine hinreichende Belegung g für v mit* $\lambda(v) < \lambda(u)$, $g \supseteq f|\mathtt{occ}(u)$ *und* $y = \mathtt{den}(v, g)$.
(ii) Ist f eine hinreichende Belegung für den Term u und gilt $x = \mathtt{den}(u, f)$, *so folgt* $\rho(x) \leq \lambda(u)$.

Beweis: (i) Für den Fall $u \equiv \mathbf{s}$ beachte man, daß S transitiv ist und $\lambda(\mathbf{s}) = \rho(s)$ gilt. Im Fall $u \equiv a_i$ hat jedes Element von $\mathtt{den}(a_i, f) = f(i) \subseteq \omega$ einen endlichen Rang. Da $\lambda(a_i) = \omega$ gilt, folgt die Aussage aus Lemma 3.6. Für $u \equiv b$ und $y \in b = \mathtt{den}(b, f)$ wählt man ein $i \notin \mathrm{Vb}(f)$ und eine Belegung $g \supseteq f$ mit $g(i) = y$. Setzt man $v \equiv a_i$, so folgt $\mathtt{den}(v, g) = y$ und $\lambda(v) = \omega < \omega + 1 = \lambda(b)$. Der Fall $u = \Diamond_\alpha x \phi(x)$ schließlich ist eine unmittelbare Folgerung aus der Definition von $\mathtt{den}$.

(ii) Dieser Beweis wird mit transfiniter Induktion über $\lambda(u)$ geführt. Sei also u ein Term mit $\lambda(u) = \alpha$, f eine hinreichende Belegung für u und sei die Aussage bereits für alle Terme v mit $\lambda(v) < \alpha$ bewiesen. Es ist $\rho(x) \leq \lambda(u) = \alpha$, d. h. $x \subseteq R_\alpha$ zu zeigen. Sei also $y \in x = \mathtt{den}(u, f)$, dann kann man v und g gemäß Teil (i) wählen. Nun folgt $\lambda(v) < \lambda(u)$, also nach Induktionsvoraussetzung $\rho(y) \leq \lambda(v) < \alpha$, d. h. $y \in R_\alpha$. □

Definition 3.12 Die Teilmengen von ω werden durch $\underline{x < y} \Leftrightarrow \min((x \cup y) \setminus (x \cap y)) \in y$ linear geordnet. Jede k-Folge $q : k \to \{0, 1\}$ bestimmt die Teilmenge

$$b_q := \{y \in b \mid \forall i < k((q(i) = 1 \Longrightarrow i \in y) \wedge (q(i) = 0 \Longrightarrow i \notin y))\}$$

von b. Diese b_q werden als <u>absolute Intervalle von b</u> oder einfach als <u>absolute Intervalle</u> bezeichnet. Die dazugehörigen k-Folgen q heißen <u>Intervallbezeichner</u> . Man beachte, daß für $x, y \in b_q$ und $x < z < y$ auch $z \in b_q$ gilt, womit die Bezeichnung *Intervall* gerechtfertigt erscheint. Weiterhin stellt man fest, daß für zwei absolute Intervalle b_q, b_p mit nichtleerem Durchschnitt $b_p \subseteq b_q$ oder $b_q \subseteq b_p$ gelten muß, wobei z. B. $b_p \subseteq b_q$ genau dann gilt, wenn $p \supseteq q$ gilt.

Kapitel 4

Die Theorie SP

4.1 Die Axiome von SP

Nachdem ich im letzten Kapitel die nötigen Vorbereitungen getroffen habe, kann ich nun die Theorie SP einführen, um die es im Rest dieser Arbeit gehen wird. Die Theorie SP ist ein im Prädikatenkalkül erster Stufe formuliertes Axiomensystem, das insbesondere die Axiome von ZF beinhaltet. In der Theorie lassen sich weitere, in ZF nicht herleitbare, Sätze beweisen, von denen die wichtigsten sind:

(i) der Boolesche Primidealsatz,

(ii) es existiert in den reellen Zahlen eine Dedekind-endliche und dichte Menge und

(iii) es existiert eine injektive Funktion F', die das Universum auf $\mathrm{On} \times \mathbb{R}$ abbildet (dabei sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen).

Wenn sich also zeigen läßt, daß die Theorie SP konsistent ist (vorausgesetzt, daß ZF konsistent ist), hat man insbesondere gezeigt, daß sich in ZF das Auswahlaxiom, sogar das abzählbare Auswahlaxiom, nicht aus dem Booleschen Primidealsatz herleiten läßt.

Ich möchte nun die Axiome von SP einführen und anschließend erläutern. Die Sprache von SP ist dabei die Sprache von ZF, erweitert um das Konstantensymbol b und die einstelligen Prädikate S und F. Die Axiome von SP sind:

(i) Alle Axiome von ZF. Dabei sollen die Aussonderungsaxiome und die Ersetzungsaxiome auch die neuen Symbole b , S und F von SP enthalten dürfen.

(ii) b ist eine „dichte“ Teilmenge von $\mathfrak{P}(\omega)$, d. h. kein absolutes Intervall von b ist leer.

(iii) S ist eine transitive Klasse, die alle Ordinalzahlen, alle endlichen Teilmengen von S und alle Mengen $S \cap R_\alpha$ sowie $F \cap R_\alpha$ für jede Ordinalzahl α enthält.

(iv) F ist eine Funktion von On auf S.

(v) Das Axiomenschema der Fortsetzbarkeit:
Sei Φ eine Formel von SP mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n, y$. Dabei seien $x_1, \ldots, x_n$ aus $S \cup \{b\}$ und $y = (y_0, \ldots, y_{m-1})$ sei eine m-Folge paarweise verschiedener Elemente aus b (für ein $m \in \omega$), außerdem soll $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ gültig sein. Dann existiert eine m-Folge $c = (c_0, \ldots, c_{m-1})$ disjunkter, absoluter Intervalle in b, so daß y_i in c_i liegt für jedes $i < m$ und die Formel $\Phi(x_1, \ldots, x_n, z)$ gültig ist für jede m-Folge z von Elementen aus b, die $z_i \in c_i$ für jedes $i < m$ erfüllt.

(vi) Für jedes Element x existiert ein Term u und eine hinreichende Belegung f für u, so daß $x = \mathtt{den}(u, f)$ gilt.

Zu den Axiomen möchte ich einige Bemerkungen machen, die sowohl ihre Semantik als auch ihre Syntaktik betreffen. Wie ich bereits im letzten Kapitel erwähnt habe, gibt es in der Sprache SP im Gegensatz zur Sprache $\mathcal{L}$ keine Konstantensymbole a_i für die Elemente von b. Weiterhin sind zwar alle Axiome von SP metasprachlich aufgeführt, aber man muß sie ja auch in der Sprache von SP formulieren können. Daß dieses möglich ist, wird in den nächsten Kapiteln zwar deutlich werden, aber ich möchte bereits hier darauf eingehen. Weiterhin möchte ich natürlich auch versuchen, die Bedeutung der Axiome zu erläutern.

Zu (i): Sowohl Sinn als auch Formulierbarkeit im Prädikatenkalkül sind klar.

Zu (ii): Es läßt sich im Pradikatenkalkül die Aussage „x ist eine Funktion $f : k \to \{0, 1\}$ für ein $k \in \omega$" formulieren. Also kann man auch die Aussage „x ist ein absolutes Intervall in b" im Prädikatenkalkül formulieren, somit auch das Axiom (ii).

Zu (iii) und (iv): Wenn man die Aussage „jede endliche Teilmenge von S ist ein Element von S" etwas anders als „für jede Menge x, die endlich ist und die $S(y)$ für jedes $y \in x$ erfüllt, gilt $S(x)$" formuliert, erkennt man sofort, daß sich diese Aussage in der Sprache von SP formulieren läßt. Auch die Aussage „$x = R_\alpha$" kann man im Prädikatenkalkül notieren, nämlich durch

$$\exists r : \mathrm{Fkt}(r) \land \mathrm{Vb}(r) = \alpha + 1 \ \land\ r(\alpha) = x \ \land\ \forall \beta < \alpha : r(\beta) = \bigcup_{\gamma < \beta} \mathfrak{P}(r(\gamma))\,.$$

Damit ist klar, daß man auch Axiom (iii) insgesamt im Prädikatenkalkül formulieren kann. Die Formulierbarkeit von Axiom (iv) ist klar. Natürlich bedeutet „F ist eine Funktion" nicht, daß F eine Menge ist, sondern nur, daß F eine Klasse geordneter Paare ist, die die Funktionseigenschaft erfüllt.

Beim später folgenden Beweis der Konsistenz von SP wird von einem Modell von ZF und dem Konstruktibilitätsaxiom ausgegangen, zu dem die Menge b „adjungiert" wird. S wird dann die Klasse der Mengen des ursprünglichen Modells sein, die *Standardmengen*. F ist dann eine gemäß Konstruktibilitätsaxiom existierende Funktion von On auf die Klasse aller (Standard)mengen, also auf S. Weiterhin erkennt man aufgrund von Axiom (iii), daß S alle Zeichen von $\mathcal{L}$ und also auch alle Ausdrücke von $\mathcal{L}$ enthält.

Zu (v): Dieses ist ein Axiom für jede Formel Φ von SP. In dem Schema unterscheide ich aus Gründern der Einfachheit von der Notation nicht zwischen den in Φ vorkommenden Variablen und Mengen, durch die diese Variablen substituiert werden, d. h. „x_i“ ist einerseits die Bezeichnung einer Variable, andererseits die Bezeichnung einer Menge aus $S \cup \{b\}$. Der metasprachliche Beginn des Axioms sollte also wie folgt in das Prädikatenkalkül umgesetzt werden: $\forall x_1 \in S \cup \{b\} \ldots \forall x_n \in S \cup \{b\} \ldots$ Die Bedeutung des Axioms ist also die folgende: Die freien Variablen von Φ werden belegt entweder mit Elementen aus $S \cup \{b\}$ oder aus b, so daß die Formel gültig ist. Dann kann man sozusagen die Elemente aus b zu ganzen, disjunkten, absoluten Intervallen in b „aufblasen“, und man kann jedes Element aus b durch ein anderes Element des dazugehörigen Intervalles in Φ ersetzen, und die so neu belegte Formel Φ bleibt gültig. Letztendlich sagt damit das Axiom aus, daß die Elemente von b in einem gewissen Sinn ununterscheidbar sind. Schließlich kann man auch schnell zeigen, daß man beim Verzicht auf die Bedingungen, daß y eine Folge *paarweise verschiedener* Elemente und c eine Folge *disjunkter* Intervalle ist, aus den Axiomen einen Widerspruch herleiten kann.

Es läßt sich bestimmt die Aussage „$m \in \omega$ und y ist eine m-Folge verschiedener Elemente aus b“ in SP formulieren; sei $\Psi_1(y, m)$ eine entsprechende Formel. Analog sei $\Psi_2(c, m)$ die Aussage „$c = (c_0, \ldots, c_{m-1})$ ist eine m-Folge disjunkter, absoluter Intervalle in b“. Die Schreibweise „$c = (c_0, \ldots, c_{m-1})$“ ist legitim, da sich die einzelnen Komponenten c_i der Folge c auch durch Formeln in SP beschreiben lassen. So kann man das Axiom (v) objektsprachlich wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}&\forall x_1 \in S \cup \{b\} \ldots \forall x_n \in S \cup \{b\}\, \forall m \in \omega\, \forall y(\Psi_1(y, m) \wedge \Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \Longrightarrow \\ &\exists c = (c_0, \ldots, c_{m-1})(\Psi_2(c, m) \wedge (\forall i \in m\ y_i \in c_i) \wedge \forall z(\Psi_2(z, m) \wedge (\forall i \in m\ z_i \in c_i) \Longrightarrow \\ &\Psi(x_1, \ldots, x_n, z))))\end{aligned}$$

Zu (vi): Dieses Axiom ist zweifellos am schwierigsten in der Sprache von SP zu formulieren. Die im letzten Kapitel definierte Funktion `den` agiert auf einer echten Klasse (da bereits S eine echte Klasse ist), somit kann man sie nicht einfach als Menge in einer Formel von SP erfassen.

Zuerst muß man erkennen, daß sich metasprachliche Aussagen der Form „ϕ ist ein Term, eine Formel, ein Ausdruck“ auch in der Sprache von SP formulieren lassen. Da die Begriffe *Term, Formel, Ausdruck* induktiv definiert sind, kann man den Satz “ϕ ist ein Term“ z. B. durch “jede Menge, die alle in ϕ vorkommenden Konstantensymbole $\mathbf{s}$, alle in ϕ vorkommenden Konstantensymbole a_i sowie das Konstantensymbol b der Sprache $\mathcal{L}$ enthält und die gegenüber dem Aufbau von Termen abgeschlossen ist, enthält ϕ“ ersetzen, wobei der letzte Satz sich offensichtlich auch in der Prädikatenlogik notieren läßt. Sei nun $\Psi_1(u)$ eine Formel in der Sprache von SP mit der einzigen freien Variablen u, die für den metasprachlichen Satz „u ist ein Term“ steht. Auf ähnliche Weise läßt sich auch „$\lambda(\phi) = \alpha$“, wobei ϕ ein beliebiger Ausdruck sein kann, durch eine Formel $\Psi_2(\phi, \alpha)$ darstellen. Schließlich soll $\Psi_3(T, \alpha)$ für die Aussage „T ist die Menge aller Ausdrücke ϕ mit $\lambda(\phi) \leq \alpha$“ stehen, die sich problemlos mit Hilfe von Ψ_2 formulieren läßt. Ein derartiges T möchte ich *Anfangsstück von TL* nennen. Es ist nun zwar `den` eine echte Klasse, aber `den`, eingeschränkt auf beliebige Anfangsstücke von *TL*, ergibt immer Mengen. Da `den` induktiv aufgebaut ist, kann man diese Mengen nun auch in der Prädikatenlogik beschreiben, d. h. es existiert eine Formel $\Psi_4(H,T)$; die „T ist ein Anfangsstück von TL und es gilt $H = \mathtt{den}|T \times B$, wobei B die Menge aller Belegungen ist.“ ausdrückt. Damit läßt sich nun Axiom (v) in der Sprache von SP wie folgt formulieren:

$$\forall x \exists u (\Psi_1(u) \wedge \exists T \exists H (u \in T \wedge \Psi_4(H,T) \wedge \exists f\, H(u,f) = x))$$

Im folgenden werde ich objektsprachliche Formeln von SP mit großen griechischen Buchstaben wie Φ, Ψ bezeichnen, um sie dadurch von den Formeln von $\mathcal{L}$, die ich mit kleinen griechischen Buchstaben wie ϕ, ψ, bezeichne, zu unterscheiden.

4.2 Das Auswahlaxiom in SP

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden Sätze in der Theorie SP hergeleitet. Die Beweise werden, wie üblich, metasprachlich geführt, sind aber letztendlich als Beweise im Prädikatenkalkül erster Stufe mit den Axiomen von SP zu verstehen.

Satz 4.1 *Jedes absolute Intervall ist unendlich.*

Beweis: Gemäß Axiom (ii) ist kein absolutes Intervall leer. Sie nun q der Intervallbezeichner des absoluten Intervalles b_q. Dann sind $q\hat{}(1), q\hat{}(0,1), q\hat{}(0,0,1), q\hat{}(0,0,01)\ldots$ Bezeichner für abzählbar unendlich viele, disjunkte, absolute Teilintervalle von b_q, woraus unmittelbar der Satz folgt. $\square$

Satz 4.2 $S \cap b = \emptyset$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $s \in S \cap b$. Setze $\Phi(x,y) \equiv (x) = y$. Es gilt einerseits $s \in S$, andererseits ist (s) eine 1-Folge von Elementen aus b. Also kann man auf die gültige Formel $\Phi\,(s,(s))$ das Fortsetzungsaxiom anwenden und erhält ein absolutes Intervall c, so daß $\Phi(s,(z))$ gültig ist für jedes $z \in c$, d. h. es gilt $s = z$ für jedes $z \in c$. Dann müßte c aber genau aus dem Element s bestehen, im Widerspruch zu Satz 4.1. $\square$

Aufgrund eines ähnlichen Argumentes erkennt man, daß in Axiom (v) y tatsächlich eine Folge *paarweise verschiedener* Elemente aus b sein muß. Denn betrachtet man die Formel $\Phi \equiv x_1 = x_2$ und substituiert beide Variablen durch ein Element $y_0 = y_1$ aus b, so ist zwar $\Phi(y_0, y_1)$ gültig, man kann aber bestimmt keine zwei absoluten Intervalle c_0, c_1 finden, so daß $\Phi(z_1, z_2)$ gültig ist für beliebige Elemente $z_1 \in c_1$, $z_2 \in c_2$.

Satz 4.3 *b ist Dedekind-endlich, d. h. b enthält keine abzählbar unendliche Teilmenge.*

Beweis: Angenommen, $t : \omega \to b$ ist injektiv. Gemäß Axiom (vi) und Korollar 3.9 gilt $t = \mathtt{den}(u,f)$ für einen Term $u \in TL$ und eine injektive Belegung $f : m \to \omega$

(für ein $m \in \omega$). Offensichtlich ist $\mathrm{Nb}(t) \setminus \mathrm{Nb}(f)$ nichtleer und enthält ein kleinstes Element d. Es sei $\Phi(u, f\hat{\ }(d)) \equiv$ „u ist ein Term, f ist eine hinreichende Belegung für u, $\mathtt{den}(u, f)$ ist eine injektive Funktion von ω nach b und d ist das kleinste Element von $\mathrm{Nb}(\mathtt{den}(u, f)) \setminus \mathrm{Nb}(f)$" (auch hier unterscheide ich von der Notation nicht zwischen Variablen und Mengen, durch die diese Variablen substituiert werden). Es ist u gemäß Axiom (iii) ein Element von S, und $f \cup (m, d)$ ist eine $(m + 1)$-Folge von Elementen aus b. Da $\Phi(u, f\hat{\ }(d))$ gültig ist, kann man nun das Fortsetzungsaxiom anwenden und erhält insbesondere für die letzte Komponente von $f\hat{\ }(d)$ ein absolutes Intervall c mit $d \in c$, d. h. $\Phi(u, f \cup (m, d'))$ ist gültig für jedes $d' \in c$. Dann wäre also jedes $d' \in c$ ein kleinstes Element von $\mathrm{Nb}(t) \setminus \mathrm{Nb}(f)$, was im Widerspruch zu Satz 4.1 steht. □

Korollar 4.4 *Es existiert eine Dedekind-endliche und dichte Teilmenge der reellen Zahlen.*

Beweis: Es reicht, da das Intervall $(0, 1)$ ordnungsisomorph zu den reellen Zahlen ist, den Satz für dieses Intervall zu beweisen. Von jeder reellen Zahl aus $(0, 1)$, die keine abbrechende Dualdarstellung besitzt, ist ihre Dualdarstellung eindeutig. Es ist weiterhin kein Element aus b eine endliche Teilmenge von ω, da diese Mengen gemäß Axiom (iii) Standardmengen sind, die Elemente von b wegen Satz 4.2 aber nicht. Folglich ist die Abbildung $f : x \to \sum_{n \in x} 2^{-(n+1)}$ eine injektive Funktion von b in $(0, 1]$. Da kein absolutes Intervall leer ist, liegt $f[b]$ dicht in $(0, 1]$; $f[b]$ ist wegen Satz 4.3 außerdem auch Dedekind-endlich. □

Definition 4.5 Für jede Belegung f setze

$$L_f := \{\mathtt{den}(u, f) \mid u \in \mathit{TL} \wedge \mathtt{occ}(u) \subseteq \mathrm{Vb}(f)\} .$$

L_f sollte natürlich nicht mit L_α verwechselt werden. Aufgrund von Korollar 3.9 hängt L_f nur von $\mathrm{Nb}(f)$ ab.

Da sich b nicht wohlordnen läßt, kann man auch „das Universum von SP" nicht wohlordnen. Allerdings läßt sich gemäß Axiom (iv) S und damit, wegen $\mathit{TL} \subseteq S$, auch TL wohlordnen. Das ist so zu verstehen, daß es eine durch eine Formel von SP definierte Klassenrelation R gibt, für die sich „jede Teilmenge von TL hat ein bezüglich R kleinstes Element" beweisen läßt. Wenn man sich nun auf eine feste Belegung f einschränkt, kann man folglich auch die Klasse aller $\mathtt{den}(u, f)$ für diese feste Belegung f wohlordnen. Die Formel, die diese Wohlordnungsrelation definiert, muß dann natürlich auch f enthalten (d. h. sie enthält eine freie Variable, die durch f substituiert wird). Insgesamt gilt also:

Satz 4.6 *Sei f eine fest gewählte Belegung. Dann existiert eine mit Hilfe von f definierbare Relation, die L_f wohlordnet.*

Das nächste Lemma und das nächste Korollar sind offensichtlich im wesentlichen Anwendungen des Fortsetzungsaxioms. Die nicht übermäßig komplizierten Beweise sind ebenso technisch wie unergiebig, aus diesem Grunde möchte ich hier auf sie verzichten. In den folgenden Lemmata, Sätzen und Korollaren möchte ich, wie bereits schon geschehen, häufiger auf eine unterschiedliche Bezeichnung von Variablen und Mengen, die diese Variablen ersetzen, verzichten, um die Notation nicht unnötig aufzublähen.

Lemma 4.7 *Sei Φ eine Formel von* SP *mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n, g'$ und sei f eine fest gewählte Belegung. Seien $x_1, \ldots, x_n \in L_f$, $m < \omega$, $g' = (g'_0, \ldots, g'_{m-1})$ eine m-Folge paarweise verschiedener Elemente aus $b \setminus \mathrm{Nb}(f)$, so daß $\Phi(x_1, \ldots, x_n, g')$ gilt. Dann existiert eine m-Folge $(e_0, \ldots, e_{m-1})$ paarweise disjunkter, absoluter Intervalle mit $g'_i \in e_i$ für jedes $i < m$, so daß $\Phi(x_1, \ldots, x_n, g)$ gültig ist für jede m-Folge $g = (g_0, \ldots, g_{m-1})$, die $g_i \in e_i$ für jedes $i < m$ erfüllt.*

Definition 4.8 Sei G eine Teilmenge von b mit $k \in \omega$ Elementen. Dann <u>unterteilt</u> die k-Folge $e = (e_0, \ldots, e_{k-1})$ absoluter Intervalle die Menge G, wenn die e_i's paarweise disjunkt sind und jedes Element von G in genau einem e_i liegt.

Korollar 4.9 *Sei Φ eine Formel von* SP *mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n, G'$ und sei f eine fest gewählte Belegung. Seien $x_1, \ldots, x_n \in L_f$, G' eine Teilmenge von $b \setminus \mathrm{Nb}(f)$ mit m Elementen und es gelte $\Phi(x_1, \ldots, x_n, G')$. Dann existiert eine m-Folge $(e_0, \ldots, e_{m-1})$ absoluter Intervalle , die G' unterteilt, so daß $\Phi(x_1, \ldots, x_n, G)$ gültig ist für jede Menge G, die aus jedem e_i genau ein Element enthält.*

Definition 4.10 Sei Φ eine Formel von SP und sei $\delta \in \mathrm{On}$. Ich möchte Φ nun eine Formel Φ^δ aus SP und eine Formel $\phi_{\Phi,\delta}$ aus $\mathcal{L}$ zuordnen.
Φ^δ entsteht aus Φ, indem man jeden Quantor in Φ auf L_δ einschränkt, d. h. indem man jeden Quantor $\exists x$ durch $\exists x \in L_\delta$ und entsprechend jeden Quantor $\forall x$ durch $\forall x \in L_\delta$ ersetzt. Das ist von der Notation natürlich eigentlich nicht möglich, da L_δ kein Symbol der Sprache von SP ist. Doch man kann L_δ in der Prädikatenlogik beschreiben, d. h. die Aussage $x \in L_\delta$ ist durch eine Formel $\Psi(x)$ aus SP notierbar. Somit muß man z. B. $\exists x \ldots$ strenggenommen durch $\exists x\ \Psi(x) \wedge \ldots$ ersetzen.
$\phi_{\Phi,\delta}$ soll dadurch aus Φ entstehen, daß man jeden Quantor $\exists x$ durch $\exists_\delta x$, jedes Auftreten von $S(x)$ durch $x \in \mathbf{s}_\delta$ und jedes Auftreten von $F(x)$ durch $x \in \mathbf{f}_\delta$ ersetzt. Dabei seien $s_\delta = S \cap R_\delta$ und $f_\delta = F \cap R_\delta$. Da $s_\delta, f_\delta \in S$ gemäß Axiom (iii) gilt, besitzen s_δ und f_δ die Konstantensymbole $\mathbf{s}_\delta = (4, s_\delta)$ und $\mathbf{f}_\delta = (4, f_\delta)$. Man beachte, daß der Übergang von Φ zu $\phi_{\Phi,\delta}$ ein Wechsel der benutzten Sprache und damit mehr als ein bloßes Ersetzen von Symbolen ist. So geht z. B. das Symbol $\in$ in das geordnete Paar $(0, 2)$ über. Wenn man es ganz präzise machen will, beschreibt man $\phi_{\Phi,\delta}$ dadurch, daß man eine Funktion $H_\Phi(\delta) : \mathrm{On} \to \mathcal{L}$ definiert (mit $H_\Phi(\delta) = \phi_{\Phi,\delta}$ natürlich). Da die Sprache SP keine Konstantensymbole a_i enthält, folgt $\mathtt{occ}(\phi_{\Phi,\delta}) = \emptyset$.

Lemma 4.11 *Sei $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel von* SP *mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Sei $u_i \in TL$, $\mathtt{occ}(u_i) \subseteq \mathrm{Nb}(f)$, $x_i = \mathtt{den}(u_i, f)$ und $\lambda(u_i) < \delta$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Dann ist $\Phi^\delta(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann gültig, wenn $\mathtt{den}(\phi_{\Phi,\delta}(u_1, \ldots, u_n), f) = 1$ gilt (wobei $\phi_{\Phi,\delta}(u_1, \ldots, u_n)$ die Formel ist, die entsteht, indem man in $\phi_{\Phi,\delta}(x_1, \ldots, x_n)$ jedes freie Vorkommen eines x_i durch u_i ersetzt).*

Beweis: Mittels Induktion über den Aufbau der Formeln von SP.

(i) Sei $\Phi \equiv x_i \in x_j$. Dann gilt $x_i \in x_j$ genau dann, wenn $\mathtt{den}(u_i, f) \in \mathtt{den}(u_j, f)$, also nach Definition von $\mathtt{den}$ wenn $\mathtt{den}(u_i \in u_j, f) = 1$ gilt. Für $\Phi \equiv x_i = x_j$ verläuft der Beweis analog.

(ii) Sei $\Phi \equiv S(x_i)$. Dann gilt $S(x_i)$ genau dann, wenn $S(\mathtt{den}(u_i, f))$ gilt. Nach Lemma 3.11 folgt aber $\rho(\mathtt{den}(u_i, f)) < \delta$, also gilt $S(\mathtt{den}(u_i, f))$ genau dann, wenn $\mathtt{den}(u_i, f) \in s_\delta$, also $\mathtt{den}(u_i \in \mathbf{s}_\delta, f) = 1$ zutrifft. Analog beweist man den Fall $\Phi \equiv F(x_i)$.

(iii) Ist Φ eine atomare Formel, die das Konstantensymbol b enthält, so verfährt man wie in (i) oder (ii).

(iv) Ist Φ von der Form $\neg\Psi$ oder $\Psi \vee \Gamma$, so folgt die Behauptung direkt aus der Induktionsannahme.

(v) Sei $\Phi \equiv \exists x_0 \Psi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Nach Definition ist $\Phi^\delta(x_0, \ldots, x_n)$, also die Formel $\exists x_0 \in L_\delta \Psi^\delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ genau dann gültig, wenn es einen Term v mit $\lambda(v) < \delta$ und eine hinreichende Belegung g für v gibt mit $\Psi^\delta(\mathtt{den}(v, g), \mathtt{den}(u_1, f), \ldots, \mathtt{den}(u_n, f))$. Mit Lemma 3.7 und Korollar 3.9 kann man o. B. d. A. annehmen, daß g und f auf $\bigcup_{1 \le i \le n} \mathtt{occ}(u_i)$ übereinstimmen. Es gilt auch $\bigcup_{1 \le i \le n} \mathtt{occ}(u_i) = \mathtt{occ}(\phi_{\Phi,\delta}(x_0, u_1, \ldots, u_n))$, da $\mathtt{occ}(\phi_{\Psi,\delta}) = \emptyset$ gilt. Weiterhin folgt aus der Induktionsvoraussetzung, angewendet auf Ψ und die Belegung g, daß $\Psi^\delta(\mathtt{den}(v, g), \mathtt{den}(u_1, f), \ldots, \mathtt{den}(u_n, f))$ genau dann gültig ist, wenn $\mathtt{den}(\phi_{\Psi,\delta}(v, u_1, \ldots, u_n), g) = 1$ gilt. Insgesamt folgt also, daß $\Phi^\delta(x_0, \ldots, x_n)$ genau dann gültig ist, wenn es einen Term v und eine hinreichende Belegung g für v gibt mit $\lambda(v) < \delta$, $\mathtt{den}(\phi_{\Psi,\delta}(v, u_1, \ldots, u_n), g) = 1$ und

$$g|\mathtt{occ}(\phi_{\Psi,\delta}(x_0, u_1, \ldots, u_n)) = f|\mathtt{occ}(\phi_{\Psi,\delta}(x_0, u_1, \ldots, u_n)) \ .$$

Dieses ist nach Definition von $\mathtt{den}$ genau dann gültig, wenn $\mathtt{den}(\phi_{\Phi,\delta}(u_1, \ldots, u_n), f) = 1$ gilt. $\square$

Lemma 4.12 *L_f enthält alle seine endlichen Teilmengen.*

Beweis: Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L_f$. Dann existiert ein Term u_i mit $\mathtt{occ}(u_i) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$ und $\mathtt{den}(u_i, f) = x_i$ für jedes $1 \le i \le n$. Sei $\delta > \lambda(u_1), \ldots, \lambda(u_n)$ und sei v der Term $\Diamond_\delta x(x = u_1 \vee \ldots \vee x = u_n)$. Offensichtlich folgt $\mathtt{den}(v, f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. $\square$

Korollar 4.13 *Jede Belegung f liegt in L_f.*

Beweis: Sei $f = \{(i_0, f(i_0)), \ldots, (i_n, f(i_n))\}$. Da die natürlichen Zahlen in L_f liegen ($i_k = \mathtt{den}(\mathbf{i}_k, f)$), folgt mit Lemma 4.12, daß die Mengen $\{i_k\}$, $\{i_k, f(i_k)\}$, also auch $(i_k, f(i_k))$ und schließlich f in L_f liegen. $\square$

Lemma 4.14 *Sei Φ eine Formel von* SP *mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n, y$. Ist f eine Belegung, liegen $x_1, \ldots, x_n$ in L_f und ist y die eindeutig bestimmte Menge mit $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$, so liegt auch y in L_f.*

Beweis: Seien $u_i \in TL$ mit $\texttt{occ}(u_i) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$ und $\texttt{den}(u_i, f) = x_i$ für jedes $1 \leq i \leq n$. Im ersten Schritt des Beweises möchte ich eine Ordinalzahl δ finden, so daß gilt:

$$z_1, \dots, z_{n+1} \in L_\delta \Longrightarrow (\Phi(z_1, \dots, z_{n+1}) \Longleftrightarrow \Phi^\delta(z_1, \dots, z_{n+1}))$$

Dazu konstruiere ich eine aufsteigende ω-Folge von Ordinalzahlen α_m wie folgt:

Sei α_0 die kleinste Ordinalzahl mit $\alpha_0 > \lambda(u_1), \dots, \lambda(u_n)$ und $y \in L_{\alpha_0}$ (ein derartiges α_0 muß es aufgrund von Axiom (vi) geben). Sei Δ die Menge aller Formeln $\Psi(z, z_1, \dots, z_l)$, so daß $\exists z \Psi(z, z_1, \dots, z_l)$ eine Teilformel von Φ ist (wobei l natürlich von Ψ abhängt). Ich definiere nun eine Funktion * auf On wie folgt: Für $\Psi \in \Delta$ sei $H_\Psi(z_1, \dots, z_l)$ die kleinste Ordinalzahl γ, so daß $(\exists z \in L_\gamma)\Psi(z, z_1, \dots, z_l)$ gültig ist, sofern $\exists z \Psi(z, z_1, \dots, z_l)$ gültig ist, und $H_\Psi(z_1, \dots, z_l) = 0$ sonst. Für jedes $\beta \in \mathrm{On}$ sei nun

$$\beta^* := \sup\{H_\Psi(z_1, \dots, z_l) \mid \Psi \in \Delta \wedge z_1, \dots, z_l \in L_\beta\} \,.$$

Damit folgt für jedes $\Psi \in \Delta$ und jedes $\beta \in \mathrm{On}$:

$$z_1, \dots, z_l \in L_\beta \Longrightarrow (\exists z \Psi(z, z_1, \dots, z_l) \Longleftrightarrow (\exists z \in L_{\beta^*})\Psi(z, z_1, \dots, z_l)) \,.$$

Sei nun $\alpha_{m+1} = \max\{\alpha_m, \alpha_m^*\}$ für jedes $m \in \omega$ und sei $\delta = \sup\{\alpha_m \mid m \in \omega\}$. Nun gilt für jedes $\Psi \in \Delta$ und jedes $\beta \in \mathrm{On}$:

$$z_1, \dots, z_l \in L_\delta \Longrightarrow (\exists z \Psi(z, z_1, \dots, z_l) \Longleftrightarrow (\exists z \in L_\delta)\Psi(z, z_1, \dots, z_l)) \,.$$

Nun kann man schnell mit Induktion über den Aufbau der Teilformeln Γ von Φ zeigen, daß diese Aussage auch für jede Teilformel gilt, d. h.:

$$z_1, \dots, z_l \in L_\delta \Longrightarrow (\Gamma(z, z_1, \dots, z_l) \Longleftrightarrow (\Gamma^\delta(z, z_1, \dots, z_l)) \,,$$

womit der erste Schritt des Beweises abgeschlossen ist. Wegen $x_1, \dots, x_n \in L_{\alpha_0} \subseteq L_\delta$ ist nun y das eindeutig bestimmte Element aus L_δ mit $\Phi^\delta(x_1, \dots, x_n, y)$.

Ist jetzt also w ein Term mit $\lambda(w) < \delta$ und ist g' eine hinreichende Belegung für w mit $g' \supseteq f | \bigcup_{1\leq i\leq n} \texttt{occ}(u_i)$, dann ist folglich $\Phi^\delta(x_1, \dots, x_n, \texttt{den}(w, g'))$ genau dann gültig, wenn $\texttt{den}(w, g') = y$ gilt. Das wiederum trifft nach Lemma 4.11 genau dann zu, wenn $\texttt{den}(\phi_{\Phi,\delta}(u_1, \dots, u_n, w), g') = 1$ gilt. Sei zur besseren Verständlichkeit $\chi(z)$ eine Abkürzung für $\phi_{\Phi,\delta}(u_1, \dots, u_n, z)$. Insgesamt gilt nun:

$$\begin{aligned} &\lambda(w) < \delta \wedge \mathrm{Vb}(g') \supseteq \texttt{occ}(w) \wedge g' \supseteq f | \textstyle\bigcup_{1\leq i\leq n} \texttt{occ}(u_i) \Longrightarrow \\ &(\texttt{den}(\chi(w), g') = 1 \Longleftrightarrow \texttt{den}(w, g') = y) \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Da χ gewissermaßen y beschreibt, sind nun die nötigen Voraussetzungen geschaffen, um einen Term für y zu definieren. Setze also

$$v = \Diamond_\delta x \exists_\delta y'(\chi(y') \wedge x \in y') \,.$$

(Im Gegensatz zu y ist hier y' eine Variable. In diesem Fall hielt ich es für angebracht, die Menge y und die für sie stehende Variable y' von der Notation zu unterscheiden.)

Da $\mathtt{occ}(\phi_{\Phi,\delta}) = \emptyset$ gilt, folgt $\mathtt{occ}(v) = \bigcup_{1\leq i\leq n} \mathtt{occ}(u_i) \subseteq \mathrm{Vb}(f)$. Es ist noch $\mathtt{den}(v,f) = y$ zu zeigen, woraus dann sofort $y \in L_f$ folgt. Es ist nach Definition

$$\begin{aligned}\mathtt{den}(v,f) &= \{\mathtt{den}(u,g) \mid \lambda(u) < \delta \wedge \mathtt{occ}(u) \subseteq \mathrm{Vb}(g) \wedge g \supseteq f|\mathtt{occ}(v) \\ &\qquad \wedge \mathtt{den}(\exists_\delta y'(\chi(y') \wedge u \in y'), g) = 1\} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(i) Zu $\mathtt{den}(v,f) \subseteq y$: Sei $r \in \mathtt{den}(v,f)$, d. h. $r = \mathtt{den}(u,g)$ für einen Term u und eine Belegung g wie in (4.2), womit insbesondere $\mathtt{den}(\exists_\delta y'(\chi(y') \wedge u \in y'), g) = 1$ folgt. Nach Definition von $\mathtt{den}$ heißt das, daß es einen Term w mit $\lambda(w) < \delta$ und eine Belegung g' mit $g' \supseteq g|\mathtt{occ}(\chi(y') \wedge u \in y') = g|\mathtt{occ}(v) = f|\mathtt{occ}(v) = f|\bigcup_{1\leq i\leq n} \mathtt{occ}(u_i)$ gibt, die $\mathtt{den}(\chi(w), g') = 1$ und $\mathtt{den}(u \in w, g') = 1$ erfüllen. Aus der ersten Gleichung folgt mit (4.1), daß $\mathtt{den}(w,g') = y$ gilt. Das zweite impliziert gemäß der Definition von $\mathtt{den}$ nun $r = \mathtt{den}(u,g) = \mathtt{den}(u,g') \in \mathtt{den}(w,g') = y$.

(ii) Zu $y \subseteq \mathtt{den}(v,f)$: Da $y \in L_\delta$, existieren mit Korollar 3.9 ein Term w und eine für w hinreichende Belegung g' mit $\lambda(w) < \delta$, $\mathtt{den}(w,g') = y$ und $g' \supseteq f|\bigcup_{1\leq i\leq n} \mathtt{occ}(u_i)$. Da die Voraussetzungen von (4.1) erfüllt sind, folgt $\mathtt{den}(\chi(w), g') = 1$. Sei nun $r \in y$, dann existieren gemäß Lemma 3.11 ein Term u und eine hinreichende Belegung g für u mit $\mathtt{den}(u,g) = r$ und $\lambda(u) < \lambda(w) < \delta$. Man kann aufgrund von Korollar 3.9 zusätzlich $g \supseteq g'|\mathtt{occ}(\chi(w)) \supseteq f|\mathtt{occ}(v) = f|\bigcup_{1\leq i\leq n} \mathtt{occ}(u_i)$ annehmen. Es folgt nun $\mathtt{den}(\chi(w), g) = 1 = \mathtt{den}(u \in w, g)$ (dabei ist die zweite Gleichung deswegen richtig, weil $\mathtt{den}(u,g) = r \in y = \mathtt{den}(w,g') = \mathtt{den}(w,g)$ gilt). Gemäß der Definition von $\mathtt{den}$ folgt nun $\mathtt{den}(\chi(w) \wedge u \in w, g) = 1$ und also, da auch $\lambda(w) < \delta$ gilt, insgesamt:

$$\mathtt{den}(\exists_\delta y'(\chi(y') \wedge u \in y'), g) = 1 \,.$$

Also ist $r = \mathtt{den}(u,g)$ gemäß 4.2 ein Element von $\mathtt{den}(u,f)$. □

Korollar 4.15 *Jedes L_f enthält alle absoluten Intervalle.*

Beweis: Da $b = \mathtt{den}(b,f)$ gilt, folgt $b \in L_f$. Sei b_q ein absolutes Intervall mit dem Intervallbezeichner q. Nach Axiom (iii) folgt $q \in S$, also auch $q = \mathtt{den}(\mathbf{q}, f) \in L_f$. Da b und q das Intervall b_q eindeutig bestimmen, folgt nun $b_q \in L_f$ mit Lemma 4.14. □

Lemma 4.16 *Seien f, g sowie h Belegungen mit* $\mathrm{Nb}(h) = \mathrm{Nb}(f) \cap \mathrm{Nb}(g)$. *Dann gilt* $L_h = L_f \cap L_g$.

Beweis: Es gilt $L_h \subseteq L_f \cap L_g$ nach Korollar 3.9. Außerdem kann man wegen Korollar 3.9 o. B. d. A. annehmen, daß f, g und h injektive Funktionen sind und daß es endliche Folgen f', g' gibt mit $f = h\hat{}f'$ und $g = h\hat{}g'$. Sei nun $x \in L_f \cap L_g$, d. h. es gibt Terme $u, v \in TL$ mit $x = \mathtt{den}(u,f) = \mathtt{den}(v, h\hat{}g')$. Es gilt $u, v, f', h \in L_f$ nach Axiom (iii) und Lemma 4.12. Somit kann man Lemma 4.7 auf die Formel $\mathtt{den}(u, h\hat{}f') = \mathtt{den}(v, h\hat{}g')$ anwenden und erhält eine Folge $e = (e_0, \ldots, e_{m-1})$ absoluter Intervalle mit

$$\mathtt{den}(u,f) = \mathtt{den}(v, h\hat{}z) \text{ für jedes } z \in \prod e \,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält mit Axiom (iii), Lemma 4.12 und den Korollaren 4.13 und 4.15 nur Mengen aus L_h, bestimmt also die Menge $x = \mathtt{den}(u,f)$ eindeutig mit Mengen aus L_h. Damit folgt $x \in L_h$ nach Lemma 4.14. □

Definition 4.17 Aus Lemma 4.16 folgt sofort, daß zu jeder Menge x eine eindeutig bestimmte Teilmenge c von b existiert, die $x \in L_g \iff c \subseteq \mathrm{Nb}(g)$ für jede Belegung g erfüllt. Diese Menge heißt Träger von x. Die eindeutig bestimmte Belegung f, die die Elemente des Trägers von x in aufsteigender Reihenfolge aufzählt (gemäß Definition 3.12) heißt auch Träger von x.

Satz 4.18 *Es existiert eine injektive Funktion F', die das Universum auf* $\mathrm{On} \times \mathbb{R}$ *abbildet.*

Beweis: Sei H eine injektive Abbildung, die die Menge alle endlicher Folgen von Teilmengen von ω nach $\mathbb{R}$ abbildet. Gemäß der Axiome (iii) und (iv) gibt es eine injektive Funktion $G : TL \to \mathrm{On}$. Ist x nun eine beliebige Menge, so sei f der Träger von x und α die kleinste Ordinalzahl in $\{G(u) \mid u \in TL \wedge \mathtt{occ}(u) \subseteq \mathrm{Vb}(f) \wedge \mathtt{den}(u, f) = x\}$. Setzt man dann $F'(x) = (\alpha, H(f))$, so erfüllt F' die geforderten Eigenschaften. □

4.3 Der Primidealsatz in SP

Ich komme nun zum wichtigsten Resultat in SP, dem Booleschen Primidealsatz. Dieser wird mit einem recht hohen kombinatorischen Aufwand bewiesen. Der Kernpunkt des Beweises ist ein Resultat von Halpern und Läuchli, das ich hier ohne Beweis anführen möchte. Um diesen Satz von Halpern und Läuchli formulieren zu können, benötige ich zunächst ein paar Definitionen.

Definition 4.19 Ein Baum $\mathcal{T} = (T, \leq)$ ist eine halbgeordnete Menge, so daß der von jedem Knoten $x \in T$ erzeugte untere Abschnitt $\downarrow x$ bereits linear geordnet ist. Die Mächtigkeit von $\downarrow x \setminus \{x\}$ ist die Ordnung von x. Jede Menge aller Knoten mit gleicher Ordnung ist eine Ebene des Baumes. Ein finitistischer Baum ist ein Baum, in dem jeder Knoten eine endliche Ordnung hat und auch jede Ebene endlich ist. $T|n$ ist die Menge aller Knoten in T mit einer Ordnung $\leq n$. Eine Menge A liegt über B, falls $B \subseteq \downarrow A$ gilt. Ein oberer Nachbar des Knotens x ist ein Knoten y mit $x < y$, so daß zwischen x und y keine weiteren Knoten liegen. Eine Menge A von Knoten heißt $(m, 1)$-dicht, falls es einen Knoten x mit der Ordnung m gibt, so daß A über der Menge der oberen Nachbarn von x liegt. Ist für jedes $i < k$ ein Baum $\mathcal{T}_i = (T_i, \leq_i)$ und eine Menge A_i gegeben, die $(m, 1)$-dicht in T_i liegt, so nennt man das kartesische Produkt $\prod_{i<k} A_i$ eine $(m, 1)$-Matrix.

Der Satz von Halpern und Läuchli (siehe [HaLä66]) lautet nun:

Satz 4.20 (Halpern-Läuchli) *Für jedes $i < k$ sei $\mathcal{T}_i = (T_i, \leq_i)$ ein finitistischer, abzählbarer Baum ohne maximale Knoten. Dann existiert eine natürliche Zahl n, so daß gilt: Ist $Q_1 \cup Q_2 = \prod_{i<k}(T_i|n)$ eine Zerlegung von $\prod_{i<k}(T_i|n)$, so enthält Q_1 oder Q_2 eine $(m, 1)$-Matrix für ein $m < n$.*

Dieses Resultat bildet den Kern des Beweises von BPI in der Theorie SP, der den Rest dieses Kapitels einnehmen wird. Wenn man den Satz hier mit seinem Original in [HaLä66] vergleicht, stellt man fest, daß ich die zusätzliche Bedingung *abzählbar* hinzugefügt habe. In [HaLä66] wird nämlich der Satz mit Hilfe des Baumlemmas von König bewiesen, von dem ich aber nicht sehe, warum es in der Theorie SP gelten sollte, benötigt es in seinem Beweis doch Auswahlprinzipien, die über ZF hinausgehen. Man beachte, daß es in ZF nicht evident ist, daß ein finitistischer Baum abzählbar ist. Für *abzählbare* finitistische Bäume kann nun aber das Lemma von König in ZF bewiesen werden, so daß dann seine Anwendung in [HaLä66] gerechtfertigt ist.

Satz 4.21 *Ist $\mathcal{B} \in L_f$ eine Boolesche Algebra, so existiert ein Primideal I von $\mathcal{B}$ mit $I \in L_f$. Also gilt wegen Axiom (vi) in der Theorie* SP *der Boolesche Primidealsatz.*

Beweis: Sei $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^\perp, \perp, \top)$, dann liegen B , $\wedge$, $\vee$, $^\perp$, $\perp$ und $\top$ aufgrund von Lemma 4.14 auch in L_f. Mit $\bigwedge a$ bzw. $\bigvee a$ bezeichne ich das Supremum bzw. das Infimum einer endlichen Teilmenge a von B.

Man betrachte die Menge aller (echten) Ideale von $\mathcal{B}$, die in L_f liegen. Da sich L_f gemäß Lemma 4.6 mit Hilfe von f wohlordnen läßt, kann man unter diesen Idealen ein maximales finden. Dieses geschieht wie folgt: Mit Hilfe von $\mathcal{B}$ und f kann man eine Funktion G auf einer Ordinalzahl $\alpha \in \mathrm{On}$ definieren, so daß jedes $G(\gamma)$ ein (echtes) Ideal von $\mathcal{B}$ in L_f ist, die $G(\beta) \subset G(\gamma)$ für alle $\beta < \gamma < \alpha$ erfüllt und so daß kein (echtes) Ideal existiert, das $\bigcup_{\beta<\alpha} G(\beta)$ echt umfaßt. Wegen Lemma 4.14 gilt $G \in L_f$, also folgt, wiederum wegen Lemma 4.14, $I = \bigcup_{\beta<\alpha} G(\beta) \in L_f$. Offensichtlich ist I das gewünschte Ideal. Ich werde nun zeigen, daß dieses Ideal ein Primideal ist.

Doch zunächst möchte ich ein paar Konventionen einführen. In diesem Beweis werde ich für endliche Folgen sans-serif-Buchstaben wie $\mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \mathsf{s}$ benutzen. Die Komponenten der Folge e bezeichne ich mit e_i. Ist e eine k-Folge, so sei $\prod \mathsf{e} = \{\mathsf{c} \mid \mathsf{c}$ ist eine k-Folge mit $c_i \in e_i$ für jedes $i < k\}$ das kartesische Produkt von e. Da L_f nur von $\mathrm{Nb}(f)$ abhängt, nehme ich o. B. d. A. an, daß f eine m-Folge ist, also $\mathrm{Vb}(f) \in \omega$ gilt.

Angenommen, I ist kein Primideal. Dann existiert ein $x \in B$ mit $x \notin I$ und $x^\perp \notin I$. Zu x existieren ein Term u und eine k-Folge h' paarweise verschiedener Elemente aus $b \setminus \mathrm{Nb}(f)$ mit $x = \mathtt{den}(u, f\hat{\ }\mathsf{h}')$. Da im ganzen Beweis u und f fest gewählte Mengen sind, möchte ich $\mathtt{den}(u, f\hat{\ }\mathsf{h})$ durch $d(\mathsf{h})$ abkürzen. Damit liest sich die Annahme jetzt wie folgt:

$$d(\mathsf{h}') \in B \setminus I \text{ und } d(\mathsf{h}')^\perp \in B \setminus I\,. \tag{4.3}$$

Es kann h' nicht trivial sein. Denn wäre $\mathsf{h}' = \emptyset$, so wäre sowohl $x = d(\mathsf{h}') = \mathtt{den}(u, f)$ und, da $x^\perp$ eindeutig durch $\mathcal{B}$ und x bestimmt ist, mit Lemma 4.14 auch $x^\perp$ ein Element von L_f. Das von $I \cup \{x\}$ erzeugte Ideal wäre, wiederum mit Lemma 4.14, ein Element von L_f und enthielte also aufgrund der Maximalität von I bereits das größte Element $\top$. Das würde aber $x^\perp \in I$ bedeuten, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist h' eine k-Folge mit $k \geq 1$.

Ich möchte exemplarisch erstmal den Fall $k = 1$ behandeln. Der allgemeine Beweis unterscheidet sich zwar von diesem Fall nicht von der prinzipiellen Idee, aber doch durch einen nicht unerheblichen kombinatorischen Mehraufwand. Es ist also $\mathsf{h}' = (h_0)$. Gemäß (4.3) und Lemma 4.7 existiert nun ein absolutes Intervall c mit $h_0 \in c$ und

$$h \in c \Longrightarrow d(h) \in B \setminus I \wedge d(h)^\perp \in B \setminus I\,. \tag{4.4}$$

Da $c \in L_f$ gemäß Korollar 4.15 gilt, liegt auch das von $I \cup \{d(h) \,|\, h \in c\}$ erzeugte Ideal nach Lemma 4.14 in L_f und muß damit, da I in L_f maximal war, bereits B sein. Damit existiert ein $i \in I$ und eine endliche Teilmenge $G_1' \subseteq c$ mit $i \vee \bigvee\{d(h) \,|\, h \in G_1'\} = \top$, also insbesondere $\bigwedge\{d(h)^\perp \,|\, h \in G_1'\} \in I$, da das Infimum kleiner als i ist. Analog, wenn man das von $I \cup \{d(h)^\perp \,|\, h \in c\}$ erzeugte Ideal betrachtet, erhält man eine endliche Menge $G_2' \subseteq c$ mit $\bigwedge\{d(h) \,|\, h \in G_2'\} \in I$. Setzt man $G' = G_1' \cup G_2' \subset c$, so folgt also $\bigwedge\{d(h)^\perp \,|\, h \in G'\} \in I$ und $\bigwedge\{d(h) \,|\, h \in G'\} \in I$. Somit kann man mit Korollar 4.9 eine Folge e von absoluten Teilintervallen von c finden, die G' unterteilt und so daß gilt:

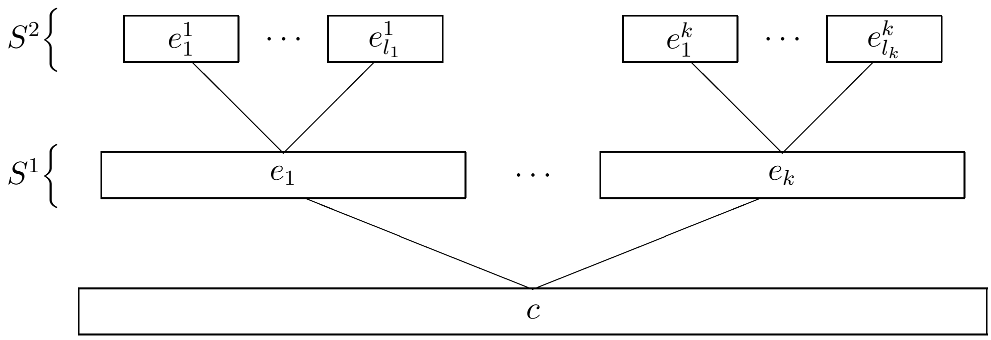
$$\begin{array}{l}\text{Enthält } G \text{ aus jedem } e_i\,,\ i \in \mathrm{Vb}(\mathsf{e}) \text{ genau ein Element, so folgt}\\ \bigwedge\{d(h) \,|\, h \in G\} \in I \text{ und } \bigwedge\{d(h)^\perp \,|\, h \in G\} \in I\,.\end{array} \tag{4.5}$$

(Für jedes $i \in \mathrm{Vb}(\mathsf{e})$ gilt $e_i \cap c \neq \emptyset$, also auch $e_i \subseteq c$ oder $c \subseteq e_i$. Im letzteren Fall könnte man aber e_i durch c ersetzen. Da die e_i's aber paarweise disjunkt sind, kann dieser Fall sowieso für kein i eintreten).

Man setzt nun $S^1 = \mathrm{Nb}(\mathsf{e})$, damit ist S^1 eine endliche Menge paarweise disjunkter, absoluter Teilintervalle von c. Für $r \in S^1$ gilt also auch (4.4), wenn man dort c durch r ersetzt. Durch dieselbe Argumentation wie eben erhält man also zu r eine endliche Folge e^r paarweise disjunkter Teilintervalle von r, so daß gilt:

$$\begin{array}{l}\text{Enthält } G \text{ aus jedem } (\mathsf{e}^r)_i\,,\ i \in \mathrm{Vb}(\mathsf{e}^r) \text{ genau ein Element, so folgt}\\ \bigwedge\{d(h) \,|\, h \in G\} \in I \text{ und } \bigwedge\{d(h)^\perp \,|\, h \in G\} \in I\,.\end{array} \tag{4.6}$$

Setze nun $S^2 = \bigcup\{\mathrm{Nb}(\mathsf{e}^r) \,|\, r \in S^1\}$. Auch S^2 ist eine Menge paarweise disjunkter, absoluter Teilintervalle von c. Ich habe jetzt also folgende Mengen konstruiert:



Sei nun y eine fest gewählte Menge, die aus jedem Element von S^2 genau ein Element enthält. Ich möchte zeigen, daß für jedes $z \subseteq y$

$$\bigwedge\{d(h) \,|\, h \in z\} \in I \text{ oder } \bigwedge\{d(h)^\perp \,|\, h \in y \setminus z\} \in I \tag{4.7}$$

gilt. Sei also $z \subseteq y$. Wenn z aus jedem $e_i \in S^1$ ein Element enthält (die Elemente von S^2 sind ja Teilintervalle der Elemente von S^1), so folgt $\bigwedge\{d(h) \,|h \in z\} \in I$ nach (4.5).

Sei also o. B. d. A. $z \cap e_1 = \emptyset$. Dann enthält aber $y \setminus z$ ein Element in jedem Teilintervall $e^1_1, \ldots, e^1_{l_1} \in \mathrm{Nb}(\mathsf{e}^1)$ von e_1, woraus mit (4.6) nun $\bigwedge\{d(h)^\perp \mid h \in y \setminus z \wedge h \in e^1_1 \cup \ldots \cup e^1_{l_1}\}$, also insbesondere $\bigwedge\{d(h)^\perp \mid h \in y \setminus z\}$ folgt. Damit ist (4.7) bewiesen.

Aus (4.7) kann ich nun einen Widerspruch herleiten. Dazu will ich folgende Notation einführen: Es sei 2^y die Menge aller Funktionen von y nach $2 = \{0, 1\}$, und es sei $d(h)^{(0)} = d(h)$ sowie $d(h)^{(1)} = d(h)^\perp$. Es folgt nun mit Hilfe des Distributivgesetzes in $\mathcal{B}$:

$$\top = \bigwedge_{h \in y} (d(h) \vee d(h)^\perp) = \bigvee_{p \in 2^y} \bigwedge_{h \in y} d(h)^{(p(h))} = \bigvee_{p \in y} a(p)\,, \tag{4.8}$$

wobei $a(p)$ eine Abkürzung für $\bigwedge_{h \in y} d(h)^{(p(h))}$ ist. Setzt man für ein beliebiges, aber festes p nun $z = \{h \in y \mid p(h) = 0\}$, so gilt $a(p) = \bigwedge_{h \in z} d(h) \wedge \bigwedge_{h \in y \setminus z} d(h)^\perp$, woraus mit (4.7) nun $a(p) \in I$ folgt. Also gilt mit (4.8) auch $\top \in I$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Nachdem der Fall $k = 1$ bewiesen ist, komme ich nun zum allgemeinen Fall $k \in \omega$. Aus (4.3) und Lemma 4.7 folgt wie im Spezialfall, daß es eine k-Folge c paarweise disjunkter, absoluter Intervalle c_i gibt mit

$$\mathsf{h} \in \prod \mathsf{c} \Longrightarrow d(\mathsf{h}) \in B \setminus I \wedge d(\mathsf{h})^\perp \in B \setminus I\,. \tag{4.9}$$

Leider läßt sich der Beweis für $k = 1$ nicht ad hoc so verallgemeinern, indem das Verfahren im Beweis einfach für jede Komponente von h durchführt, da i. A. der Beweis der Entsprechung von Gleichung (4.7) nicht mehr möglich ist. Stattdessen muß die Prozedur, die bei $k = 1$ zweimal durchgeführt wurde, nun für jede Komponente ω-mal vollzogen werden. Ich werde also zunächst für jede natürliche Zahl n eine k-Folge S^n konstruieren, wobei jede Komponente S^n_i eine Menge absoluter Teilintervalle von c_i sein wird. Diese Definition wird induktiv über n durchgeführt. Der Induktionsanfang ist $S^0_i = \{c_i\}$ für jedes $i < k$. Während der Induktion sollen simultan folgende Eigenschaften bewiesen werden:

(i) Jedes S^m_i ist eine endliche Menge absoluter Teilintervalle der Elemente von S^{m-1}_i für jedes $i < k$ und jedes $m \geq 1$.

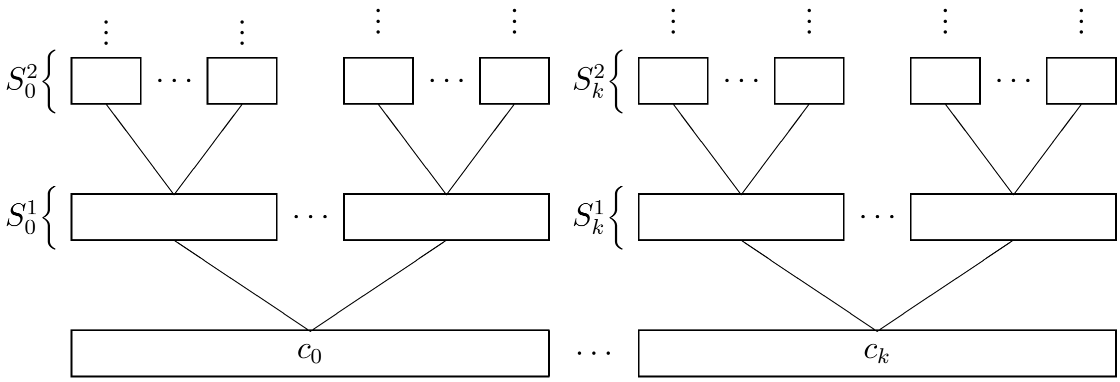
(ii) Jedes Element von S^{m-1}_i hat mindestens ein Teilintervall in S^m_i für jedes $i < k$ und jedes $m \geq 1$.

(iii) Die Elemente von S^m_i sind paarweise disjunkt für jedes $i < k$ und jedes $m \geq 1$.

(iv) Ist $\mathsf{r} \in \prod S^{m-1}$ eine k-Folge absoluter Intervalle und ist G eine endliche Menge, die aus jedem absoluten Intervall aus $\bigcup \mathrm{Nb}(S^m)$ genau ein Element enthält, dann folgen

$$\bigwedge\{d(\mathsf{h}) \mid \mathsf{h} \in \prod_{i<k}(r_i \cap G)\} \in I \quad \text{und} \quad \bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \mid \mathsf{h} \in \prod_{i<k}(r_i \cap G)\} \in I\,.$$

(Im Original [HaLé71] von Halpern und Lévy wird in Bedingung (ii) sogar die Existenz von *zwei* Teilintervallen gefordert. Doch diese Eigenschaft kann meines Erachtens nicht bewiesen werden, sie ist auch im weiteren Beweis nicht nötig.) Die Hierarchie, die ich jetzt aufbauen will, soll also so aussehen:



Beim Induktionsanfang $n = 0$ ist nur der Fall (iii) zu prüfen, der zutrifft, da nach Voraussetzung die c_i's paarweise disjunkt sind. Ich nehme jetzt also an, daß für ein festes n alle k-Folge S^m , $m \leq n$ bereits definiert sind und (i) – (iv) auf diese S^m's zutreffen. Dann konstruiere ich S^{n+1} und beweise (i) – (iv) auch für S^{n+1}.

Gemäß (i) ist jede Komponente S_i^n der k-Folge S^n eine Menge absoluter Teilintervalle von c_i. Sei $\mathsf{r} \in \prod S^n$ beliebig, aber fest gewählt. r ist dann eine k-Folge absoluter Intervalle mit $\prod \mathsf{r} \subseteq \prod \mathsf{c}$, und es gilt wegen (4.9)

$$\mathsf{h} \in \prod \mathsf{r} \Longrightarrow d(\mathsf{h}) \in B \setminus I \wedge d(\mathsf{h})^\perp \in B \setminus I \,. \tag{4.10}$$

Man betrachte nun das Ideal J, das von $I \cup \{d(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in \prod \mathsf{r}\}$ erzeugt wird. Da jedes absolute Intervall r_i nach Korollar 4.15 in L_f liegt, liegen mit Axiom (iii) und Lemma 4.12 auch die Paare (i, r_i) und schließlich die k-Folge r in L_f. Mit Lemma 4.14 gilt somit auch $J \in L_f$. Da aber wegen (4.10) nun $J \supset I$ gilt, muß bereits $J = B$, also $\top \in J$ gelten. Wie im Fall $k = 1$ erhält man eine endliche Menge $G_1''(\mathsf{r}) \subseteq \prod \mathsf{r}$ mit $\bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \,|\, \mathsf{h} \in G_1''(\mathsf{r})\} \in I$. Analog erhält man, wenn man das von $I \cup \{d(\mathsf{h})^\perp \,|\, \mathsf{h} \in \prod \mathsf{r}\}$ betrachtet, eine endliche Menge $G_2''(\mathsf{r}) \subseteq \prod \mathsf{r}$ mit $\bigwedge\{d(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in G_2''(\mathsf{r})\} \in I$. Setze nun $G'(\mathsf{r}) = \bigcup\{\mathrm{Nb}(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in G_1''(\mathsf{r})\} \cup \bigcup\{\mathrm{Nb}(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in G_2''(\mathsf{r})\}$. Die Elemente h von $G_j''(\mathsf{r})$ sind k-Folgen von Elementen aus b, also ist $G'(\mathsf{r})$ eine endliche Teilmenge von $\bigcup \mathrm{Nb}(\mathsf{r}) \subseteq b$ und enthält nach Konstruktion aus jedem r_i mindestens ein Element. Nun setze ich

$$G' = \bigcup\{G'(\mathsf{r}) \,|\, \mathsf{r} \in \prod S^n\} \,.$$

G' ist damit eine endliche Teilmenge von b, die aus jedem Element von $\bigcup\{\mathrm{Nb}(S^n)\}$ mindestens ein Element enthält. Es gilt $G_j''(\mathsf{r}) \subseteq \prod_{i<k}(r_i \cap G')$ für $j = 1, 2$, aufgrund der Definition von $G_j''(\mathsf{r})$ folgt damit

$$\begin{aligned} \mathsf{r} \in \textstyle\prod S^n \Longrightarrow \quad & \bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \,|\, \mathsf{h} \in \textstyle\prod_{i<k}(r_i \cap G')\} \in I \\ & \wedge \bigwedge\{d(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in \textstyle\prod_{i<k}(r_i \cap G')\} \in I \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ähnlich, wie man nach (4.10) $\mathsf{r} \in L_f$ erkannt hat, sieht man nun, daß auch $S^n \in L_f$ gilt. Die in (4.11) vorkommenden von G' verschiedenen Mengen sind also alle Elemente aus

L_f oder lassen sich mit Mengen aus L_f beschreiben (dieses trifft insbsondere auch auf die durch eine Formel der Sprache von SP mit Hilfe von $f \in L_f$ beschreibbare Funktion $d(\mathsf{h})$ zu). Somit kann ich auf (4.11) Korollar 4.9 anwenden und erhalte eine endliche Folge e, die G' unterteilt und für die

$$\begin{gathered} \mathsf{r} \in \prod S^n \wedge |G'| = \mathrm{Vb}(\mathsf{e}) \wedge (\forall j \in \mathrm{Vb}(\mathsf{e}))|G' \cap e_j| = 1 \Longrightarrow \\ \bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \mid \mathsf{h} \in \textstyle\prod_{i<k}(r_i \cap G')\} \in I \wedge \bigwedge\{d(\mathsf{h}) \mid \mathsf{h} \in \prod_{i<k}(r_i \cap G')\} \in I \end{gathered} \tag{4.12}$$

gilt. Man kann zusätzlich noch annehmen, daß jedes e_j ein Teilintervall eines der disjunkten Intervalle aus $\bigcup \mathrm{Nb}(S^n)$ ist: Jedes e_j enthält ja genau ein Element x aus G', das wiederum in genau einem Intervall d aus $\bigcup \mathrm{Nb}(S^n)$ liegt. Es folgt also $e_J \subseteq d$ oder $d \subseteq e_j$, aber im letzteren Fall kann ich dann e_j durch d ersetzen.

Nun kann ich endlich S^{n+1} definieren: Für jedes $i < k$ sei $S_i^{n+1} = \{e_j \mid j \in \mathrm{Vb}(\mathsf{e}) \wedge e_j$ ist ein Teilintervall eines der Intervalle aus $S_i^n\}$. Mit der zusätzlichen Annahme über die e_j's erfüllt S^{n+1} bestimmt die Bedingungen (i), (ii) und (iii). Mit (4.12) wird auch (iv) erfüllt. Ähnlich, wie man bereits $S^n \in L_f$ gesehen hat, erkennt man, daß auch S^{n+1} in L_f liegt.

Bei der Konstruktion von S^{n+1} habe ich nur endliche Auswahlen getroffen, deswegen funktioniert sie ohne das Auswahlaxiom. Allerdings ist damit noch nicht gewährleistet, daß die gesamte ω-Folge $(S^n)_{n\in\omega}$ ohne das Auswahlaxiom konstruiert werden kann. Der eben geführte Beweis sollte deshalb nicht als *die* Konstruktion von S^{n+1} angesehen werden, sondern als ein Existenzbeweis für eine k-Folge, für die (i) – (iv) der Induktion gelten. Da sich L_f nach Lemma 4.6 wohlordnen läßt, definiert man nun S^{n+1} als die bezüglich dieser Ordnung kleinste Menge, die die Bedingungen (i) – (iv) erfüllt. Man beachte dabei, daß jede Menge, auf die (i) zutrifft, mit der üblichen Argumentation bereits ein Element von L_f ist.

Nun sind die nötigen Vorbereitungen getroffen, um mit Hilfe von Satz 4.20 die Entsprechung von (4.7) aus dem Fall $k = 1$ herzuleiten. Dazu definiere ich die in der Skizze angedeuteten Bäume wie folgt: Für jedes $i < k$ sei $T_i = \bigcup_{n<\omega} S_i^n$ und $\leq_i$ sei die Umkehrung der Teilmengenrelation, also $s \leq_i t \iff t \subseteq s$. Der n-te Level von $\mathcal{T}_i = (T_i, \leq_i)$ ist damit S_i^n. Da $T_i \subseteq L_f$ für jedes $i < k$ gilt, kann man jedes T_i wohlordnen, womit natürlich jedes T_i abzählbar ist. Damit kann ich nun Satz 4.20 anwenden; sei n die aus dem Satz resultierende natürliche Zahl.

Da $W = \bigcup_{i<k, m\leq n} S_i^m$ endlich ist, erhalte ich eine Auswahlfunktion H auf W, d. h. $H(s) \in s$ für jedes $s \in W$. Für jedes $i < k$ sei nun $y_i = \{H(s) \mid s \in \bigcup_{m\leq n} S_i^m\}$ und $\mathsf{y} = (y_i)_{i<k}$. Ich möchte zeigen, daß für jedes $z \subseteq \prod \mathsf{y}$

$$\bigwedge\{d(\mathsf{h}) \mid \mathsf{h} \in z\} \in I \text{ oder } \bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \mid \mathsf{h} \in \prod \mathsf{y} \setminus z\} \in I \tag{4.13}$$

gilt. Aus (4.13) kann man genau wie aus (4.7) einen Widerspruch herleiten, wenn man dort y durch $\prod \mathsf{y}$ und h durch h ersetzt. Also ist nur noch (4.13) zu zeigen.

Sei also $z \subseteq \prod \mathsf{y}$. Die Entsprechungen von z und $\prod \mathsf{y} \setminus z$ in dem Produkt $\prod_{i<k} \mathcal{T}_i$ der Bäume $\mathcal{T}_i$ sind

$$Q_1 = \{g \in \prod_{i<k}(T_i|n) \mid (H(g_0), \ldots, H(g_{k-1})) \in z\} \text{ und } Q_2 = \prod_{i<k}(T_i|n) \setminus Q_1 \,.$$

Nach Voraussetzung enthält Q_1 oder Q_2 eine $(m,1)$-Matrix V für ein $m < n$. Ich betrachte zunächst den Fall $V \subseteq Q_1$. Sei also $V = \prod_{i<k} A_i$, wobei A_i eine $(m,1)$-dichte Menge in T_i ist für jedes $i < k$. Das heißt, daß für jedes $i < k$ ein Intervall $t_i \in S_i^m$ existiert, so daß zu jedem oberen Nachbarknoten s von t_i (d. h. $s \in S_i^{m+1}$ und $s \subseteq t_i$) ein $r \in A_i$ existiert, das oberhalb von s liegt (also $r \subseteq s$). Auf der $(m+1)$-ten Ebene von $\prod_{i<k} \mathcal{T}_i$, also auf $\bigcup \mathrm{Nb}(S^{m+1})$ definiere ich wie folgt eine Auswahlfunktion q: Ist $s \in S_i^{m+1}$ ein oberer Nachbar von t_i, so sei $q(s) = H(r)$ für ein $r \in A_i$ mit $s \leq_i r$, sonst sei $q(s) \in s$ beliebig. Sei $G = \{q(s) \,|\, s \in \bigcup \mathrm{Nb}(S^{m+1})\}$. Nun gilt nach (iv) für den Fall $m+1$:

$$\bigwedge\{d(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in \prod_{i<k}(t_i \cap G)\} \in I\,. \tag{4.14}$$

Ich möchte $\prod_{i<k}(t_i \cap G) \subseteq z$ zeigen, denn dann folgt mit (4.14) sofort $\bigvee\{d(\mathsf{h}) \,|\, \mathsf{h} \in z\} \in I$, was wiederum ein Fall aus (4.13) ist.

Sei also $\mathsf{h} \in \prod_{i<k}(t_i \cap G)$, d. h. $h_i \in t_i \cap G$ für jedes $i < k$. Sei $i < k$ beliebig, aber fest. Nach Definition von G folgt $h_i = q(s_i)$ für ein $s_i \in \bigcup \mathrm{Nb}(S^{m+1})$. Da q eine Auswahlfunktion ist, d. h. es gilt $h_i \in s_i$, folgt $h_i \in s_i \cap t_i$, womit wegen (i) und (iii) s_i ein oberer Nachbar von t_i sein muß. Aufgrund der Definition von q folgt nun $h_i = q(s_i) = H(r_i)$ für ein $r_i \in A_i$. Insgesamt gilt nun $\mathsf{h} = (H(r_0), \ldots, H(r_{k-1}))$ mit $\mathsf{r}(r_0, \ldots, r_{k-1}) \in \prod_{i<k} A_i \subseteq Q_1$. Aufgrund der Definition von Q_1 (Q_1 entsprach ja im Grunde z) folgt nun $\mathsf{h} \in z$. Damit ist die Inklusion $\prod_{i<k}(t_i \cap G) \subseteq z$ bewiesen.

Der zweite Fall $V \subseteq Q_2$ wird fast wie der erste Fall bewiesen. Sei $z' = \prod \mathsf{y} \setminus z$. Dann folgt nach Definition

$$Q_2 = \{g \in \prod_{i<k}(T_i|n) \,|\, (H(g_0), \ldots, H(g_{k-1})) \in z'\}\,.$$

Nun kann man wie beim ersten Fall mit Q_2 anstelle von Q_1 und z' anstelle von z verfahren. Dort, wo (iv) beim ersten Fall angewandt wurde, um (4.14) zu zeigen, benutzt man (iv) nun, um

$$\bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \,|\, \mathsf{h} \in \prod_{i<k}(t_i \cap G)\} \in I$$

herzuleiten. Daraus folgt dann wie im ersten Fall $\bigwedge\{d(\mathsf{h})^\perp \,|\, \mathsf{h} \in z'\} \in I$, was wiederum (4.13) impliziert. $\square$

Kapitel 5

Die Boolesche Bewertung von SP

Ab jetzt soll bewiesen werden, daß SP konsistent mit ZF ist. Dazu wird von nun an in ZF, zusammen mit dem Konstruktibilitätsaxiom, gearbeitet. Ich werde allerdings aus Gründen der Einfachheit im folgenden häufig nur von der Theorie ZF sprechen, wenn ich eigentlich die Theorie ZF+„Konstruktibilitätsaxiom meine. Dabei beachte man, daß das Konstruktibilitätsaxiomen nur bei sehr wenigen der folgenden Argumentationen gebraucht wird. Die entsprechenden Stellen wird der Leser ohne weiteres erkennen. Der Beweis der Konsistenz nun basiert auf der Methode des Forcing von Cohen, hier in der von Scott und Solovay entwickelten Variation mit Booleschwertigen Modellen (siehe [ScSo71]). Dabei wird eigentlich von dem Begriff *Modell für eine Mengenlehre* kein Gebrauch gemacht; trotzdem werde ich ihn ab und zu benutzen, wenn ich die Beweisintentionen zu erklären versuche. Dann ist aber das Wort *Modell* rein metasprachlich zu verstehen und nicht z. B. als präzise definierter Begriff im Sinne der Modelltheorie.

Da ich jetzt in ZF über $\mathcal{L}$ und SP „rede“, denke man sich am besten auch die Sprache SP gödelisiert, ähnlich wie es bereits mit $\mathcal{L}$ geschehen ist. Auf den Ausdrücken ϕ von $\mathcal{L}$ wird eine Funktion $\|\phi\|$, eine *Bewertung*, definiert, die der Funktion $\mathtt{den}(\phi, f)$ in einem gewissen Sinne ähnlich ist. Der Wertebereich von $\|\ \|$ wird eine (natürlich in ZF) fest vorgegebene, vollständige Boolesche Algebra $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^\perp, \perp, \top)$ sein. Aufbauend auf diese Funktion werden dann auch die Sätze von SP bewertet werden. Die Bewertung kann dann so interpretiert werden, daß B eine ganze Menge von Wahrheitswerten ist, die zwischen „falsch“, d. h. $\perp$, und „wahr“, d. h. $\top$, liegen. Um letztendlich daraus eine zweiwertige Bewertung zu schaffen, könnte man die Boolesche Algebra mit einem bestimmten, einem sogenannten *generischen* Ultrafilter durchfaktorisieren. Doch da man diese Ultrafilter in ZF nicht genau „kennt“, kann man in ZF die Wahrheit von Sätzen, die nicht gerade mit $\perp$ oder $\top$ bewertet werden, nicht immer entscheiden. Doch diese Dinge möchte ich nicht weiter ausführen, da ich sie in dieser Arbeit nicht benötigen werde.

In der nun folgenden Interpretation von SP soll nun S die Klasse V aller Mengen meines Modell von ZF sein, also ist jede „echte“ Menge x eine Standardmenge von SP mit dem Namen $\mathbf{x}$. F sei eine Funktion, die On auf V abbildet; ein derartiges F gibt es aufgrund des Konstruktibilitätsaxioms. Das ist natürlich *nicht* so zu verstehen, daß in SP die

Aussagen $S = V$ oder „F ist eine Funktion von On auf V“ beweisbar sind, sie sind in SP sogar nachweislich zu widerlegen (siehe z. B. Satz 4.2). Die Interpretation von S und F in ZF gehen stattdessen vor allem an zwei Stellen ein:

(i) In der Sprache $\mathcal{L}$, über die ich auch in ZF Aussagen treffen kann, soll es zu jeder Menge x von ZF den Namen $\mathbf{x}$ geben. Genaugenommen definiere ich in ZF die Theorien $\mathcal{L}$ und SP und mache in ZF Aussagen über sie, und bei der Definition von $\mathcal{L}$ wird zu jeder Menge x sein Konstantensymbol $\mathbf{x}$ in die Sprache von $\mathcal{L}$ aufgenommen.

(ii) In Definition 5.2 tauchen die Terme $\bigvee_{s \in S} \|u_i = \mathbf{s}\|$ und $\bigvee_{s \in F} \|u_i = \mathbf{s}\|$ auf. Da es sich um Terme von ZF handelt, sind S und F in ZF zu interpretieren, es handelt sich dort also bei S um die Allklasse und bei F um die Funktion von On auf V, die gemäß Konstruktibilitätsaxiom existiert.

Die Menge b kann ich natürlich nicht einfach in ZF angeben, da sie ja eine besondere Menge von SP ist, vor allem keine Standardmenge. Stattdessen sollen die Konstanten a_i durch eine fest vorgegebene Bewertung beschrieben werden, und b soll aus genau den a_i's bestehen. Wie das zu verstehen ist, ist wohl am besten in der nun folgenden Definition nachzuvollziehen.

Noch eine schreibtechnische Bemerkung: Ich werde ab jetzt in der Booleschen Algebra häufig auf das Zeichen $\wedge$ für die Infimumverknüpfung verzichten, weil das im allgemeinen die Lesbarkeit der Formeln erhöht. So soll z. B. der Term $b_1 b_2$ für $b_1 \wedge b_2$ stehen. Diese Abkürzung steht auch in Übereinstimmung mit der häufigen Schreibweise der Infimumverknüpfung als Multiplikation und der Supremumsverknüpfung als Addition, wobei dann auf das Malzeichen der Multiplikation verzichtet wird. Weiterhin soll bei Operationen in $\mathcal{B}$ der Infimumsoperator $\wedge$ stärker als der Supremumsoperator $\vee$ binden, was auch durch den Verzicht auf das $\wedge$-Zeichen verdeutlicht wird.

Definition 5.1 Sei $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_{i,n} \mid i, n \in \omega\}$ eine fest vorgegebene Doppelfolge von Elementen der vollständigen Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ (ich werde zur besseren Lesbarkeit im folgenden Elemente aus der Booleschen Algebra mit gotischen Buchstaben wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ benennen). Auf der Menge aller Formeln ϕ von $\mathcal{L}$ wird induktiv die Bewertung $\|\phi\|$ definiert. In der Definition seien dabei u, v beliebige Terme und ϕ, ψ beliebige Formeln aus $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}
\|u \in a_i\| &= \bigvee_{n \in \omega} \|u = \mathbf{n}\| \mathfrak{a}_{i,n} \, , \\
\|u \in b\| &= \bigvee_{i \in \omega} \|u = a_i\| \, , \\
\|u \in \mathbf{s}\| &= \bigvee_{t \in s} \|u = \mathbf{t}\| \, , \\
\|u \in \Diamond_\alpha x \phi(x)\| &= \bigvee_{\lambda(v) < \alpha} \|u = v\| \, \|\phi(v)\| \, , \\
\|u = v\| &= \bigwedge_{\lambda(x) < \gamma} \|x \in u \iff x \in v\| \quad \text{mit } \gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\} \, ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\neg\phi\| &= \|\phi\|^{\perp}\,, \\
\|\phi \vee \psi\| &= \|\phi\| \vee \|\psi\|\,, \\
\|\exists_\alpha x \phi(x)\| &= \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|\phi(v)\|\,.
\end{aligned}$$

Offensichtlich folgen damit $\|\phi \wedge \psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$, $\|\forall_\alpha x\phi(x)\| = \bigwedge_{\lambda(v)<\alpha} \|\phi(v)\|$ und $\|u = v\| = \|\forall_\gamma x(x \in u \iff x \in v)\|$ (mit $\gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$).

Es ist natürlich zu prüfen, daß die Funktion $\| \ \|$ wohldefiniert ist. Dazu definiert man zwei Funktionen λ_1, λ_2 auf den Formeln von $\mathcal{L}$ wie folgt: Ist ϕ eine Formel von $\mathcal{L}$ mit $\lambda(\phi) = \alpha + 1$ (man beachte, daß $\lambda(\phi)$ immer eine Nachfolgerordinalzahl ist, wenn ϕ eine atomare Formel ist) und ϕ enthält eine Teilformel der Form $u \in v$ mit $\lambda(u) = \alpha$, so sei $\lambda_1(\phi) = 2$. Ist $\lambda(\phi) = \alpha + 1$, ϕ enthält keine Teilformel der Form $u \in v$ mit $\lambda(u) = \alpha$, aber eine Teilformel der Form $u = v$ mit $\lambda(u) = \alpha$ oder $\lambda(v) = \alpha$, so sei $\lambda_1(\phi) = 1$. In allen anderen Fällen sei $\lambda_1(\phi) = 0$. $\lambda_2(\phi)$ sei die Anzahl der Symbole $\neg, \vee$ und $\exists_\alpha$ von ϕ, die in keinem Aussonderungsterm in ϕ auftreten. Es gilt nun mit diesen Definitionen:

(i) In jedem Fall aus Definition 5.1 treten bei der Definition von $\|\phi\|$ nur Ausdrücke ψ auf mit $\lambda(\psi) \leq \lambda(\phi)$. Gilt dabei sogar $\lambda(\psi) = \lambda(\phi)$, so folgt dann entweder $\lambda_1(\psi) < \lambda_1(\phi)$ oder $\lambda_1(\psi) = \lambda_1(\phi)$ und $\lambda_2(\psi) < \lambda_2(\phi)$.

(ii) Die Klasse aller Formeln ϕ von $\mathcal{L}$ mit $\lambda(\phi) \leq \alpha$ ist eine Menge.

Damit wird $\| \ \|$ definiert per Induktion über die (linksseitige) lexikographische Ordnung über die Tripel $(\lambda(\phi), \lambda_1(\phi), \lambda_2(\phi))$. Die Menge der Vorgänger einer Formel ϕ ist dabei wegen (ii) eine Menge. Somit kann man $\|\phi\|$ auf eindeutige Weise für jede Formel ϕ definieren.

Mit Hilfe der Bewertung $\| \ \|$ möchte ich nun eine Bewertung auf der Menge aller Sätze von SP definieren. Die Einschränkung auf Sätze (statt Formeln) ist offensichtlich sekundär, da man zu jeder Formel den Allabschluß betrachten kann. Der Zweck der Sprache $\mathcal{L}$ ist, daß sie Namen für die Elemente des Universums von SP bereitstellt, wie man an Axiom (vi) erkennt. Die Terme von $\mathcal{L}$ sind gewissermaßen Konstantensymbole für die Mengen des Universums von SP (syntaktisch gesehen offenkundig falsch, da hier eine eigentlich unerlaubte Mischung der Sprachebenen stattfindet, aber die Intention ist zu erkennen), so daß es naheliegt, die freien Variablen von Formeln aus SP durch Terme aus $\mathcal{L}$ zu substituieren. Dieses geschieht in ZF syntaktisch korrekt auf folgende Weise:

Definition 5.2 Zu jeder Formel Φ aus SP mit den freien Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ ordne ich einen Term τ_Φ aus ZF mit den freien Variablen $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ zu, in die Terme aus TL eingesetzt werden können (τ_Φ hat auch zwei weitere freie Variablen, in die dann $\mathcal{B}$ und $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_{i,n} \,|\, i, n \in \omega\}$ eingesetzt werden, aber die vernachlässige ich hier, da $\mathcal{B}$ und $\mathfrak{a}$ fest gewählt sind). Wie üblich werde ich von der Notation nicht zwischen Variablen u_{i_l} und

Termen aus TL, durch die diese Variablen substituiert werden, unterscheiden. τ_Φ wird nun induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\tau_{x_i \in x_j}(u_i, u_j) &\text{ sei } \|u_i \in u_j\| \,, \\
\tau_{x_i = x_j}(u_i, u_j) &\text{ sei } \|u_i = u_j\| \,, \\
\tau_{S(x_i)} &\text{ sei } \bigvee_{s \in S} \|u_i = \mathbf{s}\| \,, \\
\tau_{F(x_i)} &\text{ sei } \bigvee_{s \in F} \|u_i = \mathbf{s}\| \,.
\end{aligned}$$

Wenn Φ eine atomare Formel ist, die b enthält, wird τ_Φ natürlich entsprechend definiert. Die weitere Induktion liegt nahe:

$$\begin{aligned}
\tau_{\neg\Phi}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &\text{ sei } \tau_\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})^\perp \,, \\
\tau_{\Phi \vee \Psi}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &\text{ sei } \tau_\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \vee \tau_\Psi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \,, \\
\tau_{\Phi \wedge \Psi}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &\text{ sei } \tau_\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \wedge \tau_\Psi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \,, \\
\tau_{\exists x_j \Phi(x_j, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &\text{ sei } \bigvee_{u_j \in TL} \tau_\Phi(u_j, u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \,, \\
\tau_{\forall x_j \Phi(x_j, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &\text{ sei } \bigwedge_{u_j \in TL} \tau_\Phi(u_j, u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \,.
\end{aligned}$$

Es werden natürlich analog auch noch $\tau_{\Phi \Longrightarrow \Psi}$ und $\tau_{\Phi \Longleftrightarrow \Psi}$ definiert. Dieses ist hier nötig, da ich, im Gegensatz zur Sprache von $\mathcal{L}$, in der Sprache von SP noch die Junktoren $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ und den Quantor $\forall$ als eigene Zeichen zur Verfügung habe. Ich hätte natürlich bei einer eingeschränkten Definition meines Prädikatenkalküls darauf verzichten können.

Die Schreibweise $\tau_\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})$ ist unnötig kompliziert; ich werde stattdessen die suggestivere Schreibweise $\|\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})\|$ benutzen. Das ist auf den ersten Blick nicht eindeutig, wie ich an einem Beispiel zeigen möchte. Für $\tau_{x \in y \wedge y = z}(u, v, u)$ schreibe ich $\|u \in v \wedge v = u\|$. Doch das kann auch für die Operation $\|\ \|$, angewendet auf die Formel $u \in v \wedge v = u$ aus $\mathcal{L}$ (statt aus SP) stehen, oder auch für $\tau_{x \in y \wedge y = x}(u, v)$. Doch man kann sich leicht überlegen, daß in allen drei Fällen der Wert $\|u \in v \wedge v = u\|$ aus B derselbe ist, womit diese Mehrdeutigkeit zu keinen ernsthaften Schwierigkeiten führt. Um dieses zu präzisieren, müßte man diverse Lemmata beweisen, doch auf diesen Aufwand möchte ich hier verzichten, da es schließlich auch nicht essentiell zum Verständnis des folgenden beiträgt. Man kann sich also immer beim Lesen eines Ausdrucks $\|\Phi(v_1, \ldots, v_n)\|$ eine bestimmte Interpretation vorstellen, wenn man nicht vergißt, daß diese Interpretation nicht zwingend ist. Ich werde im folgenden, wie allgemein üblich, für eine Formel Φ mit den freien Variablen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ den Ausdruck $\|\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})\|$ häufig durch $\|\Phi\|$ abkürzen.

Die nächsten Lemmata, die ich jetzt beweisen möchte, zeigen, daß die Bewertung der Sätze von SP mit dem Prädikatenkalkül verträglich ist. Das ist wie folgt zu verstehen: Die Elemente von B kann man als Wahrheitswerte zwischen „falsch“ ($= \perp$) und „wahr“ ($= \top$) interpretieren. Ein Satz Ψ ist also „wahrer“ als ein Satz Φ, wenn $\|\Psi\| \geq \|\Phi\|$ gilt (dabei beachte man, daß $\|\Psi\| \geq \|\Phi\|$ genau dann gilt, wenn $\|\Phi \Longrightarrow \Psi\| = \top$ gilt).

Diese Eigenschaft soll sich auch bei formalen Ableitungen widerspiegeln, d. h. wenn Ψ in SP aus Φ herleitbar ist, d. h. wenn gemäß Deduktionstheorem $\Phi \Longrightarrow \Psi$ herleitbar ist, so sollte dementsprechend $\|\Psi\| \geq \|\Phi\|$ gelten. Weiterhin sollen natürlich auch die Axiome des Prädikatenkalküls gültig sein, d. h. die Bewertung $\top$ erhalten. Daß diese Eigenschaften auf $\| \ \|$ zutreffen, wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels gezeigt.

Lemma 5.3 *(i) Ist Φ eine logisch gültige Formel im Prädikatenkalkül erster Stufe ohne die Gleichheitsrelation (aber mit Prädikaten), so gilt $\|\Phi\| = \top$.*
(ii) Wird Ψ von Φ im Prädikatenkalkül erster Stufe ohne Gleichheit impliziert, so gilt $\|\Phi\| \leq \|\Psi\|$.

Beweis: (i) Es ist zu zeigen, daß die aussagenlogischen Axiome sowie die Axiome, die die Quantoren betreffen, mit $\top$ bewertet werden, und daß die beiden Schlußregeln von (bzgl. $\| \ \|$) gültigen Formeln zu gültigen Formeln führen. Da man die Bewertung $\| \ \|$ nur für Sätze definiert hat, betrachtet man bei Formeln natürlich immer den entsprechenden Allabschluß.

Die Gültigkeit der aussagenlogischen Axiome ist Aufgrund der Definition von $\| \ \|$ bei Junktoren klar. Ich betrachte also nun die vier Axiome, die die Quantoren betreffen.

$\exists$-Ax1: Es sei $n \geq i, k$ so gewählt, daß alle freien Variablen unter $v_1, \ldots, v_n$ vorkommen. Seien $u_1, \ldots, u_n$ Terme. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \|\phi(u_1, \ldots, u_n)\| &= \|\phi\begin{pmatrix} v_i \\ v_k \end{pmatrix}(u_1, \ldots u_{k-1}, u_i, u_{k+1}, \ldots, u_n)\| \\ &\leq \bigvee_{u \in TL} \|\phi\begin{pmatrix} v_i \\ v_k \end{pmatrix}(u_1, \ldots u_{k-1}, u, u_{k+1}, \ldots, u_n)\| \\ &\overset{\text{Def.} \| \ \|}{=} \|\exists v_k \phi\begin{pmatrix} v_i \\ v_k \end{pmatrix}(u_1, \ldots, u_n)\| \end{aligned}$$

Damit folgt $\|\phi(u_1, \ldots, u_n) \Longrightarrow \phi\binom{v_i}{v_k}(u_1, \ldots, u_n)\| = \top$, also gemäß der Definition von $\| \ \|$ auch $\|\forall v_1 \ldots \forall v_n(\phi \Longrightarrow \exists v_k \phi\binom{v_i}{v_k})\| = \top$.

$\exists$-Ax2: Da es in der Sprache von SP keine Funktionssymbole gibt, ist hier nichts zu zeigen.

$\exists$-Ax3: Es sei n wieder so gewählt, daß alle freien Variablen unter $v_1, \ldots, v_n$ vorkommen, und seien $u_1, \ldots, u_n$ Terme. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\phi(u_1, \ldots, u_n)\| &\leq \bigvee_{u \in TL} \|\phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\| \\ &= \|(\exists v_i \phi)(u_1, \ldots, u_n)\| \end{aligned}$$

Ebenso wie bei dem ersten Axiom folgt nun $\|\forall v_1 \ldots \forall v_n(\phi \Longrightarrow \exists v_i \phi)\| = \top$.

$\forall$-Ax: Die Gültigkeit dieses Axioms folgt sofort aus den unendlichen De-Morganschen Gesetzen, die in $\mathcal{B}$ gültig sind.

Zu den Schlußregeln: Seien ϕ und $\phi \Longrightarrow \psi$ Formeln mit der Bewertung $\top$, sei n so gewählt, daß alle freien Variablen von ϕ und ψ unter $v_1, \ldots, v_n$ vorkommen, und seien $u_1, \ldots, u_n$ Terme. Es gilt nun $\|\phi(u_1, \ldots, u_n)\| = \top$ sowie $\|(\phi \Longrightarrow \psi)(u_1, \ldots, u_n)\| = \top$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\|\psi(u_1, \ldots, u_n)\| &= \|\phi(u_1, \ldots, u_n)^\perp\| \vee \|\psi(u_1, \ldots, u_n)\| \\
&= \|(\phi \Longrightarrow \psi)(u_1, \ldots, u_n)\| \\
&= \top .
\end{aligned}$$

Folglich erhält ψ die Bewertung $\top$, womit mit dem Modus Ponens aus gültigen Formeln nur gültige Formeln abgeleitet werden können.

Zur $\exists$-Regel: Es seien ϕ und ψ Formeln und v_i eine in ψ nicht frei vorkommende Variable, und es habe $\phi \Longrightarrow \psi$ die Bewertung $\top$. Sei $n \geq i$ wieder so gewählt, daß alle freien Variablen von ϕ und ψ unter $v_1, \ldots, v_n$ vorkommen, und seien $u_1, \ldots, u_n$ Terme. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\|(\exists v_i \phi \Longrightarrow \psi)(u_1, \ldots, u_n)\| \\
= \quad & \|(\exists v_i \phi)(u_1, \ldots, u_n)\|^\perp \vee \|\psi(u_1, \ldots, u_n)\| \\
= \quad & (\bigvee_{u \in TL} \|\phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\|)^\perp \vee \|\psi(u_1, \ldots, u_n)\| \\
= \quad & \bigwedge_{u \in TL} (\|\phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\|^\perp \vee \|\psi(u_1, \ldots, u_n)\|) \\
\overset{\text{Vor.}}{=} \quad & \bigwedge_{u \in TL} (\|\phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\|^\perp \vee \|\psi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\|) \\
\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \quad & \bigwedge_{u \in TL} \|(\phi \Longrightarrow \psi)(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)\| \\
\overset{\text{Vor.}}{=} \quad & \bigwedge_{u \in TL} \top \\
= \quad & \top
\end{aligned}$$

Somit führt auch die $\exists$-Regel wieder nur zu gültigen Formeln. Also erhalten alle Formeln, die im Prädikatenkalkül ohne Gleichheit hergeleitet werden können, die Bewertung $\top$.

(ii) folgt sofort mit dem Deduktionstheorem aus (i). □

Lemma 5.4 *(i)* $\|u = u\| = \|\forall x(x = x)\| = \top$.
(ii) $\|\forall x \forall y(x = y \iff y = x)\| = \top$.

Beweis: (i) Sei $\gamma = \lambda(u)$. Dann folgt $\|u = u\| = \bigwedge_{\lambda(v)<\gamma} \|v \in u \iff v \in u\| = \bigwedge_{\lambda(v)<\gamma} \top = \top$. Damit gilt auch $\|\forall x(x = x)\| = \bigwedge_{u \in TL} \|u = u\| = \top$.

(ii) Sei $\gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$. Dann folgt $\|u = v\| = \bigwedge_{\lambda(w)<\gamma} \|w \in u \iff w \in v\| = \bigwedge_{\lambda(w)<\gamma} \|w \in v \iff w \in u\| = \|v = u\|$. Damit folgt $\|u = v \iff v = u\| = \top$, also auch wie in (i): $\|\forall x \forall y(x = y \iff y = x)\| = \top$. □

Lemma 5.5 $t \in s \Longrightarrow \|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| = \top$.

Beweis: Mit 5.4(i) folgt: $\|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| = \bigvee_{u \in s} \|\mathbf{t} = \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{t} = \mathbf{t}\| = \top$. □

Lemma 5.6 *(i)* $\|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| \neq \bot \Longrightarrow t \in s$.
(ii) $\|\mathbf{t} = \mathbf{s}\| \neq \bot \Longrightarrow t = s$.

Beweis: Mittels Induktion über $\rho(s)$ beweist man:

$$\begin{aligned} & \forall t(\rho(t) < \rho(s) \wedge \|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| \neq \bot \Longrightarrow t \in s) \\ \wedge \quad & \forall t(\rho(t) \leq \rho(s) \wedge \|\mathbf{t} = \mathbf{s}\| \neq \bot \Longrightarrow t = s) \\ \wedge \quad & \forall t(\rho(t) \leq \rho(s) \wedge \|\mathbf{s} \in \mathbf{t}\| \neq \bot \Longrightarrow s \in t)\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es gelte (5.1) für jedes $\alpha < \rho(s)$. Ich beweise nun nacheinander die drei Teilformeln von (5.1).

(i) Es gilt $\|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| = \bigvee_{u \in s} \|\mathbf{t} = \mathbf{u}\|$, also gilt $\|\mathbf{t} = \mathbf{u}\| \neq \bot$ für ein $u \in s$. Es ist dann $\rho(u) < \rho(s)$ und $\rho(t) < \rho(s)$. Damit kann man auf $\|\mathbf{t} = \mathbf{u}\|$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhält $t = u$. Also folgt $t \in s$.

(ii) Sei $\gamma = \rho(s)$. Es gilt $\|\mathbf{t} = \mathbf{s}\| = \bigwedge_{\lambda(v) < \gamma} \|v \in \mathbf{t} \iff v \in \mathbf{s}\|$. Ich möchte $t \subseteq s$ zeigen, sei also $v \in t$. Es folgt dann $\|\mathbf{v} \in \mathbf{t} \iff \mathbf{v} \in \mathbf{s}\| \neq \bot$ (sonst $\|\mathbf{t} = \mathbf{s}\| = \bot$) und $\rho(v) < \rho(t) \leq \rho(s)$. Da mit Lemma 5.5 $\|\mathbf{v} \in \mathbf{t}\| = \top$ gilt, folgt $\|\mathbf{v} \in \mathbf{s}\| \neq \bot$. Nach dem eben bewiesenen Teil (i) folgt damit $v \in s$, was zu zeigen war. Die umgekehrte Inklusion $s \subseteq t$ wird analog bewiesen.

(iii) Es ist $\|\mathbf{s} \in \mathbf{t}\| = \bigvee_{u \in t} \|\mathbf{s} = \mathbf{u}\|$. Sei also $\|\mathbf{s} = \mathbf{u}\| \neq \bot$ für ein $u \in t$. Wegen $\rho(u) < \rho(t) \leq \rho(s)$ folgt mit Teil (ii) $s = u$, also $s \in t$.

Damit ist (5.1) bewiesen, womit offenbar sofort die Aussage des Lemmas folgt. □

Lemma 5.7 *(i)* $\|w \in u\|\,\|u = v\| \leq \|w \in v\|$, *falls* $\lambda(w) < max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$.
(ii) $\|u = v\|\,\|\forall x(x \in v \iff x \in w)\| \leq \|u = w\|$, *falls* $\lambda(w) \leq max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$.
(Die Einschränkungen für $\lambda(w)$ gelten nur noch in diesem Lemma, im nächsten Lemma wird gezeigt, daß man auf sie verzichten kann.)

Beweis: (i) Sei $\gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$. Dann gilt $\lambda(w) < \gamma$, also

$$\begin{aligned} \|w \in u\|\,\|u = v\| &= \|w \in u\| \bigwedge_{\lambda(x) < \gamma} \|x \in u \iff x \in v\| \\ &\leq \|w \in u\|\,\|w \in u \iff w \in v\| \\ &= \|w \in u\|\,\|w \in v\| \\ &\leq \|w \in v\|\,. \end{aligned}$$

(ii) Seien $\gamma_1 = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$ und $\gamma_2 = \max\{\lambda(u), \lambda(w)\}$. Gemäß Vorraussetzung gilt also $\gamma_2 \leq \gamma_1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\|u = v\|\,\|\forall x(x \in v \Leftrightarrow x \in w)\| &= \bigwedge_{\lambda(x)<\gamma_1} \|x \in u \Leftrightarrow x \in v\| \bigwedge_{x \in TL} \|x \in v \Leftrightarrow x \in w\| \\
&\leq \bigwedge_{\lambda(x)<\gamma_1} (\|x \in u \Leftrightarrow x \in v\|\,\|x \in v \Leftrightarrow x \in w\|) \\
&\leq \bigwedge_{\lambda(x)<\gamma_2} \|x \in u \Leftrightarrow x \in w\| \\
&= \|u = w\| \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 5.8 *(i)* $\|\forall x \forall y \forall z(z \in x \wedge x = y \Longrightarrow z \in y)\| = \top$.

(ii) $\|\forall x \forall y(x = y \iff \forall z(z \in x \iff z \in y))\| = \top$.

Beweis: Ich möchte

$$\|w \in u\|\,\|u = v\| \leq \|w \in v\| \tag{5.2}$$

sowie

$$\|u = v\| \leq \|\forall z(z \in u \iff z \in v)\| \tag{5.3}$$

simultan mittels Induktion über $\gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$ zeigen. Aus (5.2) folgt unmittelbar (i). In (5.3) gilt die Ungleichung $\geq$ aufgrund der Definition von $\|\ \|$ trivialerweise, d. h. in (5.3) gilt sogar die Gleichheit.

Angenommen, man hat in einem Induktionsschritt bereits (5.2) für u und v bewiesen. Da man dann in (5.2) auch u und v vertauschen kann, gilt für ein beliebiges z dann $\|u = v\|\,\|z \in u\| \leq \|z \in v\|$ und $\|u = v\|\,\|z \in v\| \leq \|z \in u\|$. Das ist äquivalent zu $\|u = v\| \leq \|z \in u \Longrightarrow z \in v\|$ und $\|u = v\| \leq \|z \in v \Longrightarrow z \in u\|$, somit folgt jetzt $\|u = v\| \leq \|z \in u \iff z \in v\|$. Daraus kann man dann in diesem Induktionsschritt die Gültigkeit von (5.3) erschließen. Es ist also bei jedem Induktionsschritt nur die Gültigkeit von (5.2) zu zeigen.

(5.2) ist in Lemma 5.7 bereits für $\lambda(w) < \max\{\lambda(u), \lambda(v)\} = \gamma$ gezeigt worden, man kann also o. B. d. A. $\lambda(w) \geq \lambda$ annehmen. Für u und v sind jeweils vier Fälle zu betrachten (beide können ein Konstantensymbol der Form $\mathbf{s}$, a_i oder b oder auch ein Abstraktionsterm sein). Zum Glück stellt sich aber heraus, daß man die Fälle a_i oder b nicht gesondert betrachten muß.

Fall 1: u ist ein Konstantensymbol $\mathbf{s}$ für ein $s \in S$.

Fall 1.1: v ist ein Konstantensymbol $\mathbf{r}$. Gilt $r \neq s$, so folgt $\|\mathbf{s} = \mathbf{r}\| = \bot$ nach Lemma 5.6(i), womit auch (5.2) gilt. Im Fall $r = s$ ist nichts zu zeigen.

Fall 1.2: $v \equiv \Diamond_\alpha x \phi(x)$, also insbesondere $\alpha \leq \gamma$. Sei $t \in s$ beliebig, aber fest. Nach Lemma 5.5 gilt $\|\mathbf{t} \in \mathbf{s}\| = \top$, woraus mit Lemma 5.7(i) dann $\|\mathbf{s} = v\| \leq \|\mathbf{t} \in v\|$ folgt. Mit der Induktionsannahme (5.3) schließt man

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s} = v\| &\leq \|\mathbf{t} \in v\| \\
&\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \bigvee_{\lambda(m)<\alpha} \|\mathbf{t} = m\|\,\|\phi(m)\| \\
&\overset{\text{IV}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\alpha} \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in m)\|\,\|\phi(m)\| \,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Es gelte nun $\lambda(m) < \alpha$ für ein m, also $\lambda(m) < \alpha \leq \gamma \leq \lambda(w)$. Mit Hilfe von Lemma 5.7(ii) folgt $\|w = \mathbf{t}\| \, \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in m)\| \leq \|w = m\|$. Daraus schließt man nun

$$\begin{aligned}
\|w \in \mathbf{s}\| \, \|\mathbf{s} = v\| &\overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \bigvee_{t \in s} \|w = \mathbf{t}\| \, \|\mathbf{s} = v\| \\
&\overset{(5.4)}{\leq} \bigvee_{t \in s} \bigvee_{\lambda(m) < \alpha} \|w = \mathbf{t}\| \, \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in m)\| \, \|\phi(m)\| \\
&\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{t \in s} \bigvee_{\lambda(m) < \alpha} \|w = m\| \, \|\phi(m)\| \\
&= \bigvee_{\lambda(m) < \alpha} \|w = m\| \, \|\phi(m)\| \\
&\overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \|w \in v\| \, .
\end{aligned}$$

Fall 1.3: Der Fall $v \equiv a_i$ für ein $i \in \omega$ unterscheidet sich nur in Details vom Fall $v \equiv \Diamond_\alpha x \phi(x)$. Es gilt $\omega \leq \gamma$. Für jedes $t \in s$ folgt wieder $\|\mathbf{s} = v\| \leq \|\mathbf{t} \in v\|$. Mit der Induktionsannahme (5.3) schließt man

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s} = v\| &\leq \|\mathbf{t} \in v\| \\
&\overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \bigvee_{n \in \omega} \|\mathbf{t} = n\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&\overset{\text{IV}}{\leq} \bigvee_{n \in \omega} \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in n)\| \mathfrak{a}_{i,n} \, .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Es gelte nun $n \in \omega$ für ein n, also $\lambda(n) < \omega \leq \gamma \leq \lambda(w)$. Mit Hilfe von Lemma 5.7(ii) folgt $\|w = \mathbf{t}\| \, \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in n)\| \leq \|w = n\|$. Daraus schließt man nun

$$\begin{aligned}
\|w \in \mathbf{s}\| \, \|\mathbf{s} = v\| &\overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \bigvee_{t \in s} \|w = \mathbf{t}\| \, \|\mathbf{s} = v\| \\
&\overset{(5.5)}{\leq} \bigvee_{t \in s} \bigvee_{n \in \omega} \|w = \mathbf{t}\| \, \|\forall x(x \in \mathbf{t} \iff x \in n)\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{t \in s} \bigvee_{n \in \omega} \|w = n\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&= \bigvee_{n \in \omega} \|w = n\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&\overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \|w \in v\| \, .
\end{aligned}$$

Fall 1.4: $v \equiv b$. Auch dieser Beweis ist ähnlich wie Fall 1.2 oder Fall 1.3 durchzuführen. Aus diesem Grund werde ich im folgenden auf diese beiden Fälle (auch bei u, also $u \equiv a_i$ oder $u \equiv b$) verzichten, womit insgesamt nur noch zwei Fallunterscheidungen zu machen sind.

Fall 2: $u \equiv \Diamond_\beta x \psi(x)$. Sei m beliebig, aber fest mit $\lambda(m) < \beta$. Dann folgt $\|\psi(m)\| \leq \bigvee_{\lambda(n) < \beta} \|m = n\| \, \|\psi(n)\| \overset{\text{Def.} \| \, \|}{=} \|m \in u\|$. Da $\lambda(m) < \beta \leq \gamma$, gilt mit Lemma 5.7(i) auch

$\|m \in u\| \, \|u = v\| \leq \|m \in v\|$. Daraus folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \|w \in u\| \, \|u = v\| &\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \|w = m\| \, \|\psi(m)\| \, \|u = v\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \|w = m\| \, \|m \in u\| \, \|u = v\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \|w = m\| \, \|m \in v\| \, . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Fall 2.1.: $v \equiv \mathbf{r}$ für ein $r \in S$. Für jedes m mit $\lambda(m) < \beta$ gilt aufgrund der Induktionsvoraussetzung $\|m \in v\| = \bigvee_{t \in r} \|m = \mathbf{t}\| = \bigvee_{t \in r} \|\forall x(x \in m \iff x \in \mathbf{t})\|$. Für jedes $t \in r$ folgt mit Lemma 5.7(ii) weiterhin $\|w = m\| \, \|\forall x(x \in m \iff x \in \mathbf{t})\| \leq \|\mathbf{t} = w\|$, da $\lambda(t) < \lambda(v) \leq \lambda(w)$ gilt. Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \|w \in u\| \, \|u = v\| &\overset{(5.6)}{\leq} \bigvee_{\lambda(m<\beta} \|m \in v\| \, \|w = m\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{=} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \bigvee_{t \in r} \|\forall x(x \in m \iff x \in \mathbf{t})\| \, \|w = m\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \bigvee_{t \in r} \|\mathbf{t} = w\| \\ &\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \|w \in \mathbf{r}\| \, . \end{aligned}$$

Fall 2.2: $v \equiv \Diamond_\alpha x \phi(x)$. Für jedes m mit $\lambda(m) < \beta$ gilt aufgrund der Induktionsvoraussetzung $\|m \in v\| = \bigvee_{\lambda(n)<\alpha} \|m = n\| \, \|\phi(n)\| = \bigvee_{\lambda(n)<\alpha} \|\forall x(x \in m \iff x \in n)\| \, \|\phi(n)\|$. Gilt weiterhin $\lambda(n) < \alpha$ für ein n, so folgt mit Lemma 5.7(ii) und $\lambda(n) < \alpha \leq \gamma \leq \lambda(w)$ dann $\|w = m\| \, \|\forall x(x \in m \iff x \in n)\| \leq \|w = n\|$. Somit kann man insgesamt schließen:

$$\begin{aligned} \|w \in u\| \, \|u = v\| &\overset{(5.6)}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \|m \in v\| \, \|w = m\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{=} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \bigvee_{\lambda(n)<\alpha} \|w = m\| \, \|\forall x(x \in m \iff x \in n)\| \, \|\phi(n)\| \\ &\overset{\text{s. o.}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m)<\beta} \bigvee_{\lambda(n)<\alpha} \|w = n\| \, \|\phi(n)\| \\ &\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \|w \in v\| \, . \end{aligned}$$

□

Lemma 5.9 *Es gelten*

(i) $\|u = v\| \, \|v = w\| \leq \|u = w\|$, *also* $\|\forall x \forall y \forall z(x = y \land y = z \Longrightarrow x = z)\| = \top$,

(ii) $\|u = v\| \, \|v \in w\| \leq \|u \in w\|$, *also* $\|\forall x \forall y \forall z(x = y \land x \in z \Longrightarrow y \in z)\| = \top$,

(iii) $\|u = v\| \, \|S(v)\| \leq \|S(u)\|$, *also* $\|\forall x \forall y(x = y \land S(x) \Longrightarrow S(y))\| = \top$ *und*

(iv) $\|u = v\| \, \|F(v)\| \leq \|F(u)\|$, *also* $\|\forall x \forall y(x = y \land F(x) \Longrightarrow F(y))\| = \top$.

Beweis: (i) Es gilt mit (5.3) aus Lemma 5.8:

$$\begin{aligned}
\|u = v\|\ \|v = w\| &\overset{(5.3)}{=} \|\forall x(x \in u \iff x \in v)\|\ \|\forall x(x \in v \iff x \in w)\| \\
&\leq \|\forall x(x \in u \iff x \in v \wedge x \in v \iff x \in w)\| \\
&\leq \|\forall x(x \in u \iff x \in w)\| \\
&\overset{(5.3)}{=} \|u = w\|
\end{aligned}$$

Der zweite Teil von (i) folgt unmittelbar aus dem ersten.
(ii) Sei zunächst $w \equiv a_i$ für ein $i \in \omega$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\|u = v\|\ \|v \in a_i\| &\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \bigvee_{n \in \omega} \|u = v\|\ \|v = \mathbf{n}\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&\overset{\text{(i)}}{\leq} \bigvee_{n \in \omega} \|u = \mathbf{n}\| \mathfrak{a}_{i,n} \\
&\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \|u \in a_i\|
\end{aligned}$$

Die weiteren Fälle $w \equiv b$, $w \equiv \mathbf{s}$ oder $w \equiv \Diamond_\alpha x \phi(x)$ werden analog bewiesen. Also gilt $\|u = v\|\ \|v \in w\| \leq \|u \in w\|$.

(iii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|u = v \wedge S(v)\| &\overset{\text{Def.}}{=} \bigvee_{s \in S} \|u = v\|\ \|v = \mathbf{s}\| \\
&\overset{\text{(i)}}{\leq} \bigvee_{s \in S} \|u = \mathbf{s}\| \\
&\overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \|S(u)\|
\end{aligned}$$

(iv) wird genau wie (iii) bewiesen. □

Satz 5.10 *Ist Φ ein im Prädikatenkalkül erster Stufe mit Gleichheit herleitbarer Satz, so gilt $\|\Phi\| = \top$. Ist Ψ im Prädikatenkalkül erster Stufe mit Gleichheit aus Φ herleitbar, so gilt $\|\Phi\| \leq \|\Psi\|$.*

Beweis: Folgt sofort aus den Lemmata 5.3, 5.8 und 5.9. □

Ich werde nun in den folgenden Kapiteln beweisen, daß jedes Axiom von SP die Bewertung $\top$ erhält. Wie ich bereits erwähnte, kann man sich vorstellen, ein Modell von SP durch Adjunktion von b zu einem Standardmodell der Mengenlehre zu erhalten. Dieses Modell könnte man so konstruieren, daß man die die Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ durch einen generischen Ultrafilter durchfaktorisiert, um so eine zweiwertige Bewertung der Formeln zu schaffen. Es sind dann in dem neuen Modell gerade die Sätze gültig, deren Bewertung in dem generischen Ultrafilter liegen (dieses ist bei gängigen Forcingbeweisen, die mit diesen Filtern arbeiten, eines von zwei wesentlichen Resultaten). Man kann nun diesen generischen Ultrafilter aber nicht in dem Standardmodell konstruieren (man kann sogar zeigen, daß es ihn im Standardmodell gar nicht gibt), also kann man die Gültigkeit von Sätzen in SP im allgemeinen nicht schon in dem Standardmodell entscheiden. Dieses klappt nur, wenn die Sätze mit $\top$ oder $\perp$ bewertet werden, da $\top$ in jedem und $\perp$ in keinem Filter liegt. Also weiß man von Sätzen, die mit $\top$ bewertet werden, daß sie in dem Modell von SP gültig sind, und von Sätzen, die mit $\perp$ bewertet werden, daß sie ungültig sind. Ich möchte dieses imaginäre Modell von SP mit $\mathcal{N}$ bezeichnen und werde im folgenden Schreibweisen wie z. B. „ein Satz ist in $\mathcal{N}$ gültig“ benutzen. Diese Schreibweise kann man zwar intuitiv wortgetreu interpretieren, sie ist letztendlich nur eine Umschreibung der Aussage, daß der Satz die Bewertung $\top$ erhält.

Ich werde weiterhin des öfteren Aussagen über Bewertungen von Formeln mittels Induktion über den Aufbau von Formeln beweisen. Aufgrund von Satz 5.10 reicht es bei diesen Beweisen nun aus, bei den Induktionsschritten nur die Junktoren $\neg$ und $\vee$ sowie den $\exists$-Quantor zu betrachten.

Kapitel 6

Die Bewertung der Axiome von ZF

In diesem Kapitel möchte ich zeigen, daß das Axiom (i) von SP, also jedes Axiom von ZF in $\mathcal{N}$ gültig ist. Es ist also $\|\Phi\| = \top$ für jedes dieser Axiome zu zeigen. Für das Extensionalitätsaxiom ist das bereits in Lemma 5.8(ii) geschehen.

Lemma 6.1 *Seien u, v Terme und sei $\delta \geq \lambda(v)$. Dann folgt:*

$$\|u \in v\| = \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|u = w\| \, \|w \in v\| \leq \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|u = w\| \, .$$

Beweis: Die Ungleichung in dem Satz gilt trivialerweise. Die $\leq$-Beziehung der Gleichung gilt aufgrund der Definition von $\|u \in v\|$. Die $\geq$-Beziehung folgt sofort aus $\|u \in v\| \geq \|u = w\| \, \|w \in v\|$, was aufgrund von Lemma 5.9 gilt. $\square$

Satz 6.2 (Vereinigungsmengenaxiom)
Das Vereinigungsmengenaxiom $\forall x \exists y \forall z \forall t (t \in z \land z \in x \Longrightarrow t \in y)$ ist in $\mathcal{N}$ gültig.

Beweis: Für jedes $u \in TL$ ist $\|\exists y \forall z \forall t (t \in z \land z \in u \Longrightarrow t \in y)\| = \top$ zu zeigen. Sei $\alpha = \lambda(u)$ und $v \equiv \Diamond_\alpha x(x = x)$. Es reicht $\|w \in m\| \, \|m \in u\| \leq \|w \in v\|$ für alle $w, m \in TL$ zu zeigen. Gemäß Lemma 6.1 gilt

$$\|m \in u\| \leq \bigvee_{\lambda(m')<\alpha} \|m = m'\| \, ,$$

also folgt mit den Lemmata 5.8(i) und 6.1 nun

$$\begin{aligned}
\|w \in m\| \, \|m \in u\| &\overset{\text{Lem. 6.1}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m')<\alpha} \|w \in m\| \, \|m = m'\| &&\overset{\text{Lem. 5.8}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m')<\alpha} \|w \in m'\| \\
&\overset{\text{Lem. 6.1}}{\leq} \bigvee_{\lambda(m')<\alpha} \bigvee_{\lambda(w')<\lambda(m')} \|w = w'\| &&\leq \bigvee_{\lambda(w')<\alpha} \|w = w'\| \\
&= \bigvee_{\lambda(w')<\alpha} \|w = w'\| \, \|w' = w'\| &&= \|w \in v\| \, .
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.3 (Potenzmengenaxiom)
Das Potenzmengenaxiom $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \Longrightarrow z \in y)$ *ist in* $\mathcal{N}$ *gültig.*

Beweis: Für jedes $u \in TL$ ist $\|\exists y \forall z (z \subseteq u \Longrightarrow z \in y)\| = \top$ zu zeigen. Sei $\alpha = \lambda(u)$ und $a = \{v \in TL \,|\, \lambda(v) < \alpha\} \cup \{u\}$. Für jedes $w \in TL$ setzt man

$$f_w : \left\{ \begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & B \\ v & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lcl} \|v \in u\| & : & \text{falls } v \not\equiv u \\ \|w \subseteq u\| & : & \text{falls } v \equiv u \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Zuerst möchte ich zeigen, daß für beliebige $w, w' \in TL$ die Implikation

$$f_w = f_{w'} \Longrightarrow \|w \subseteq u\|\,\|w' \subseteq u\| \leq \|w = w'\| \tag{6.2}$$

gilt. Es gelte also $f_w = f_{w'}$; weiterhin sei $v \in TL$. Mit Lemma 6.1 und Satz 5.10 folgt

$$\begin{aligned} \|v \in u\| \quad & \leq \quad \bigvee_{\lambda(m)<\alpha} \|v = m\| \\ & \overset{f_w = f_{w'}}{=} \quad \bigvee_{\lambda(m)<\alpha} \|v = m\|\,\|m \in w \Longleftrightarrow m \in w'\| \\ & \overset{\text{Satz 5.10}}{\leq} \quad \bigvee_{\lambda(m)<\alpha} \|v \in w \Longleftrightarrow v \in w'\| \\ & = \quad \|v \in w \Longleftrightarrow v \in w'\| \,. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|\forall x (x \in u \Longrightarrow (x \in w \Longleftrightarrow x \in w'))\| = \top$. Aus der Formel in $\|\ \|$ kann man mit dem Extensionalitätsaxiom die Formel $w \subseteq u \wedge w' \subseteq u \Longrightarrow w = w'$ herleiten. Somit gilt gemäß Satz 5.10 nun

$$\|w \subseteq u \wedge w' \subseteq u \Longrightarrow w = w'\| = \top \,,$$

woraus sofort (6.2) folgt.

Für jede Funktion f_w existiert natürlich ein w' mit $f_w = f_{w'}$, so daß $\lambda(w')$ minimal ist. Da aber $\{f_w \,|\, w \in TL\} \subseteq B^a$ eine Menge ist, kann man zu all diesen minimalen $\lambda(w')$'s eine obere Schranke γ finden, d. h. zu jedem $w \in TL$ existiert ein $w' \in TL$ mit $f_w = f_{w'}$ und $\lambda(w') < \gamma$. Nun setzt man

$$t \equiv \Diamond_\gamma x(x = x) \,.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn man $\|w \subseteq u\| \leq \|w \in t\|$ für jeden Term w zeigen kann. Sei also $w \in TL$, dann existiert ein $w' \in TL$ mit $f_w = f_{w'}$ und $\lambda(w') < \gamma$. Nach Wahl von w' folgt $\|w' \in t\| = \top$, woraus mit (6.1) nun

$$\|w \subseteq u\| \overset{f_w = f_{w'}}{=} \|w \subseteq u\|\,\|w' \subseteq u\| \overset{(6.2)}{\leq} \|w = w'\|\,\|w' \in t\| \leq \|w \in t\|$$

folgt. $\square$

Lemma 6.4 *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) Sei $\Gamma(x)$ *eine Formel von* SP, *sei* T *eine Teilklasse von* TL *und sei* $c : T \to B$ *eine Funktion, so daß*

$$\|\Gamma(u)\| = \bigvee_{v \in T} \|u = v\|\, c(v)$$

für jeden Term u *gilt. Dann folgen*

$$\|\exists x(\Gamma(x) \wedge \Psi(x))\| = \bigvee_{v \in T} \|\Psi(v)\|\, c(v) \text{ und}$$

$$\|\forall x(\Gamma(x) \Longrightarrow \Psi(x))\| = \bigwedge_{v \in T} (c(v)^{\perp} \vee \|\Psi(v)\|)\,.$$

(ii) Sei $\Gamma(x)$ *eine Formel von* SP *und* T *eine Teilklasse von* TL, *so daß* $\|\Gamma(u)\| = \bigvee_{v \in T} \|u = v\|$ *für jeden Term* u *gilt. Dann folgen*

$$\|\exists x(\Gamma(x) \wedge \Psi(x))\| = \bigvee_{v \in T} \|\Psi(v)\| \quad , \quad \|\forall x(\Gamma(x) \Longrightarrow \Psi(x))\| = \bigwedge_{v \in T} \|\Psi(v)\|\,.$$

(iii) $$\|\exists x(x \in S \wedge \Psi(x))\| = \bigvee_{s \in S} \|\Psi(\mathbf{s})\| \quad , \quad \|\forall x(x \in S \Longrightarrow \Psi(x))\| = \bigwedge_{s \in S} \|\Psi(\mathbf{s})\|\,.$$

(iv) $$\|\exists x(x \in \mathbf{s} \wedge \Psi(x))\| = \bigvee_{t \in s} \|\Psi(\mathbf{t})\| \quad , \quad \|\forall x(x \in \mathbf{s} \Longrightarrow \Psi(x))\| = \bigwedge_{t \in s} \|\Psi(\mathbf{t})\|\,.$$

Beweis: (i) Da die Formel $u = v \wedge \Psi(u)$ äquivalent zu $u = v \wedge \Psi(v)$ ist, haben die beiden Formeln dieselbe Bewertung, d. h. es gilt $\|u = v\|\,\|\Psi(u)\| = \|u = v\|\,\|\Psi(v)\|$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|\exists x(\Gamma(x) \wedge \Psi(x))\| &= \bigvee_{u \in TL} \bigvee_{v \in T} \|u = v\|\, c(v)\, \|\Psi(v)\| \\ &= \bigvee_{v \in T} \Big(\bigvee_{u \in TL} \|u = v\| \Big) c(v)\, \|\Psi(v)\| \\ &= \bigvee_{v \in T} c(v)\, \|\Psi(v)\|\,. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt durch einfaches Berechnen aus der ersten.

(ii) folgt aus (i), indem man $c(v) = \top$ für jedes $v \in TL$ setzt.

(iii) und (iv) folgen aus (ii). □

Lemma 6.5 *(i) Gilt* $\|u = \mathbf{s}\| \neq \perp$, *so folgt* $\lambda(u) \geq \rho(s)$.
(ii) Gilt $\|\mathbf{s} \in u\| \neq \perp$, *so folgt* $\lambda(u) > \rho(s)$.

Beweis: (i) und (ii) werden simultan mittels transfiniter Induktion über $\lambda(u)$ bewiesen. Seien also (i) und (ii) für alle $\gamma < \lambda(u)$ gültig. Nach Lemma 6.1 gilt

$$\|\mathbf{s} \in u\| = \bigvee_{\lambda(v)<\lambda(u)} \|\mathbf{s} = v\| \, \|v \in u\| \,.$$

Gilt also $\|\mathbf{s} \in u\| \neq \bot$, so folgt $\|\mathbf{s} = v\| \neq \bot$ für ein v mit $\lambda(v) < \lambda(u)$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt $\lambda(v) \geq \rho(s)$, also folgt (ii).

Gelte nun $\|u = \mathbf{s}\| \neq \bot$. Damit folgt $\|\forall x(x \in \mathbf{s} \Longrightarrow x \in u)\| \neq \bot$ gemäß Lemma 5.8(ii) und Satz 5.10. Mit Lemma 6.4(iv) gilt $\|\mathbf{t} \in u\| \neq \bot$ für jedes $t \in s$. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung folgt $\lambda(u) > \rho(t)$ für jedes $t \in s$, also gilt $\lambda(u) \geq \rho(s)$. □

Das nächste Lemma ist von der Aussage mit Lemma 4.11 vergleichbar und zeigt damit die Ähnlichkeit von `den` und $\| \ \|$ auf.

Lemma 6.6 *Sei $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ eine Formel von* SP *und α eine vorgegebene Ordinalzahl. Dann existiert eine Ordinalzahl $\delta \geq \alpha$, so daß*

$$\|\Phi(v_1, \ldots, v_n)\| = \|\phi_{\Phi,\delta}(v_1, \ldots, v_n)\|$$

gültig ist für alle $v_1, \ldots, v_n$ mit $\lambda(v_i) < \delta$ für jedes $1 \leq i \leq n$ (man beachte, daß hier Formeln aus den verschiedenen Sprachen $\mathcal{L}$ und SP *betrachtet werden).*

Beweis: Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 4.14 definiere ich eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ von Ordinalzahlen. Sei $\alpha_0 = \alpha$ und sei Δ die Menge aller Formeln $\Psi(z, z_1, \ldots, z_l)$, so daß $\exists z\Psi(z, z_1, \ldots, z_n)$ eine Teilformel von Φ ist (auch hier ist l von Ψ abhängig). Ich definiere nun die Funktion * wie folgt: Für $\Psi \in \Delta$, $w_1, \ldots, w_l \in TL$ und $a \in B$ sei $F_\Psi(w_1, \ldots, w_l, a)$ die kleinste Ordinalzahl γ, so daß es einen Term u gibt mit $\lambda(u) = \gamma$ und $\|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\| = a$. Falls es keinen sochen Term u gibt, so sei $F_\Psi(w_1, \ldots, w_l, a) = \bot$. Nun setzt man

$$\beta^* = \sup\{F_\Psi(w_1, \ldots, w_l, a) + 1 \mid \Psi \in \Delta \wedge \lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_l) < \beta \wedge a \in B\} \,.$$

Sei $\alpha_{n+1} = \max\{\alpha_n, \alpha_n^*\}$ für jedes $n \in \omega$ und schließlich $\delta = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$. Ich möchte nun

$$\|\Gamma(w_1, \ldots, w_l)\| = \|\phi_{\Gamma,\delta}(w_1, \ldots, w_l)\| \tag{6.3}$$

für alle Terme $w_1, \ldots, w_l$ mit $\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_l) < \delta$ und jede Teilformel Γ von Φ zeigen. Aus (6.3) folgt mit $\Gamma \equiv \Phi$ sofort die Aussage des Lemmas.

(6.3) wird induktiv über den Aufbau der Teilformeln von Φ bewiesen. Für $\Gamma \equiv y \in z$ oder $\Gamma \equiv y = z$ gilt (6.3) trivialerweise. Für $\Gamma \equiv S(z)$ ist $\|S(v)\| = \|v \in \mathbf{s}_\delta\|$ für jeden Term v mit $\lambda(v) < \delta$ zu zeigen. Gemäß Lemma 6.5 gilt $\|v = \mathbf{s}\| = \bot$ für jedes $s \in S$ mit $\rho(s) \geq \delta > \lambda(v)$. Damit folgt

$$\|S(v)\| = \bigvee_{s\in S} \|v = \mathbf{s}\| = \bigvee_{\rho(s)<\delta} \|v = \mathbf{s}\| = \|v \in \mathbf{s}_\delta\| \,.$$

Für $\Gamma = F(z)$ verläuft der Beweis analog. Für $\Gamma \equiv \neg\Psi$ oder $\Gamma = \Psi_1 \vee \Psi_2$ folgt (6.3) sofort aus der Induktionsvoraussetzung. Seien nun $\Gamma \equiv \exists z \Psi(z, z_1, \ldots, z_l)$ und $u, w_1, \ldots, w_l \in TL$ mit $\lambda(u), \lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_l) < \delta$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt zunächst die $\geq$-Beziehung von (6.3):

$$\begin{aligned}
\|\exists z \Psi(z, w_1, \ldots, w_l)\| &\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \bigvee_{u \in TL} \|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\| \\
&\geq \bigvee_{\lambda(u)<\delta} \|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\| \\
&\overset{\text{IV}}{=} \bigvee_{\lambda(u)<\delta} \|\phi_{\Psi,\delta}(u, w_1, \ldots, w_l)\| \\
&\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \|\exists_\delta z\, \phi_{\Psi,\delta}(z, w_1, \ldots, w_l)\| .
\end{aligned}$$

Um die $\leq$-Beziehung zu zeigen, sei nun $u \in TL$ beliebig und $c = \|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\|$. Wegen $\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_l) < \delta$ existiert ein $n \in \omega$ mit $\lambda(w_1), \ldots, \lambda(w_l) < \alpha_n$. Folglich existiert ein Term u' mit $\lambda(u') < \alpha_n^* \leq \delta$ und $\|\Psi(u', w_1, \ldots, w_l)\| = c$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\| &= \|\Psi(u', w_1, \ldots, w_l)\| \\
&\overset{\text{IV}}{=} \|\phi_{\Psi,\delta}(u', w_1, \ldots, w_l)\| \\
&\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{\leq} \|\exists_\delta z\, \phi_{\Psi,\delta}(z, w_1, \ldots, w_l)\| .
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun die $\leq$-Beziehung von (6.3):

$$\|\exists z \Psi(z, w_1, \ldots, w_l)\| \overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \bigvee_{u \in TL} \|\Psi(u, w_1, \ldots, w_l)\| \overset{\text{s. o.}}{\leq} \|\exists_\delta z\, \phi_{\Psi,\delta}(z, w_1, \ldots, w_l)\| . \qquad \square$$

Satz 6.7 (Aussonderungsaxiom)
Sei $\Psi(z)$ eine Formel von SP*, in der y nicht frei vorkommt. Dann ist die Formel $\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \in x \wedge \Psi(z))$ in $\mathcal{N}$ gültig.*

Beweis: Seien $y_1, \ldots, y_n$ die in $\Psi(z)$ vorkommenden, von z verschiedenen freien Variablen. Für $u, v_1, \ldots, v_n \in TL$ sei $\alpha > \lambda(u), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_n)$ gewählt. Gemäß Lemma 6.6 existiert eine Ordinalzahl $\delta \geq \alpha$, so daß

$$\|\Psi(w, v_1, \ldots, v_n)\| = \|\phi_{\Psi,\delta}(w, v_1, \ldots, v_n)\| \tag{6.4}$$

gilt für jedes $w \in TL$ mit $\lambda(w) < \delta$. Nun setzt man

$$v = \Diamond_\delta z (z \in u \wedge \phi_{\Psi,\delta}(z, v_1, \ldots, v_n))$$

(man beachte, daß wegen $\delta \geq \alpha > \lambda(u), \lambda(v_1), \ldots, \lambda(v_n)$ und aufgrund der Definition von $\phi_{\Psi,\delta}$ die zur Bildung von v notwendige Bedingung $\lambda(z \in u \wedge \phi_{\Psi,\delta}(z, v_1, \ldots, v_n)) \leq \delta$ tatsächlich erfüllt ist). Für jeden Term t folgt mit Satz 5.10 und Lemma 6.1 nun

$$\|t \in v\| \overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|t = w\|\, \|w \in u\|\, \|\phi_{\Psi,\delta}(w, v_1, \ldots, v_n)\|$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(6.4)}{=} \quad \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|t = w\| \, \|w \in u\| \, \|\Psi(w, v_1, \ldots, v_n)\| \\
&\overset{\text{Satz 5.10}}{=} \quad \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|t = w\| \, \|w \in u\| \, \|\Psi(t, v_1, \ldots, v_n)\| \\
&= \quad \|\Psi(t, v_1, \ldots, v_n)\| \bigvee_{\lambda(w)<\delta} \|t = w\| \, \|w \in u\| \\
&\overset{\text{Lem. 6.1}}{=} \quad \|\Psi(t, v_1, \ldots, v_n)\| \, \|t \in u\| \, ,
\end{aligned}
$$

woraus sofort die Aussage des Satzes folgt. □

Lemma 6.8 *Seien w ein Term und $\Phi(x)$ eine Formel. Dann gelten*

$$
\begin{aligned}
\|\exists x(x \in w \wedge \Phi(x))\| &= \bigvee_{\lambda(v)<\lambda(w)} \|v \in w\| \, \|\Phi(v)\| \qquad \textit{und} \\
\|\forall x(x \in w \Longrightarrow \Phi(x))\| &= \bigwedge_{\lambda(v)<\lambda(w)} (\|v \in w\|^{\perp} \vee \|\Phi(v)\|) \, .
\end{aligned}
$$

Beweis: Gemäß Lemma 6.1 gilt $\|u \in w\| = \bigvee_{\lambda(v)<\lambda(w)} \|u = v\| \, \|v \in w\|$. Setzt man in Lemma 6.4(i) nun $x \in w$ für $\Gamma(x)$, $\{v \,|\, \lambda(v) < \lambda(w)\}$ für T und $\|v \in w\|$ für $c(v)$ ein, so erhält man die Aussage dieses Lemmas. □

Satz 6.9 (Ersetzungsaxiom)
Sei $\Psi(z, t)$ eine Formel, in der y nicht frei vorkommt. Dann ist die Ausprägung des Ersetzungsaxioms $\forall x \exists y \forall z[z \in x \Longrightarrow (\exists t \Psi(z, t) \Longleftrightarrow \exists t'(t' \in y \wedge \Psi(z, t')))]$ in $\mathcal{N}$ gültig.

Beweis: Seien $y_1, \ldots, y_n$ die von z und t verschiedenen freien Variablen von $\Psi(z, t)$ und $u, v_1, \ldots, v_n \in TL$, sei $\alpha = \lambda(u)$. Ich definiere eine Funktion $H : TL \times B \to \mathrm{On}$ wie folgt: Für $v \in TL$ und $a \in B$ sei $H(v, a)$ die kleinste Ordinalzahl β, so daß es einen Term w mit $\lambda(w) = \beta$ und $\|\Psi(v, w)\| = a$ gibt. Falls es keinen solchen Term w gibt setzt man $H(v, a) = 0$. Sei γ eine obere Schranke der Menge $\{H(v, a) + 1 \,|\, \lambda(v) < \alpha \wedge a \in B\}$. Nun kann ich $u' = \diamondsuit_\gamma x(x = x)$ setzen. Der Satz ist bewiesen, wenn ich

$$
\|\forall z[z \in u \Longrightarrow (\exists t \Psi(z, t) \Longleftrightarrow \exists t'(t' \in u' \wedge \Psi(z, t')))] \, \| = \top \tag{6.5}
$$

gezeigt habe. Sei dazu v ein Term mit $\lambda(v) < \lambda(u) = \alpha$. Nach Wahl von γ existiert zu jedem Term t ein Term t' mit $\|\Psi(v, t)\| = \|\Psi(v, t')\|$ und $\lambda(t') < \gamma$, also $\|t' \in u'\| = \top$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\|\exists t \Psi(v, t)\| &= \bigvee_{t \in TL} \|\Psi(v, t)\| \\
&= \bigvee_{t' \in TL} \|t' \in u \wedge \Psi(v, t')\| \\
&= \|\exists t'(t' \in u' \wedge \Psi(v, t'))\| \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 6.8 läßt sich nun (6.5) beweisen:

$$\begin{aligned}
&\|\forall z[z \in u \Longrightarrow (\exists t\Psi(z,t) \Longleftrightarrow \exists t'(t' \in u' \wedge \Psi(z,t')))]\,\| \\
\overset{\text{Lem. 6.8}}{=}\; &\bigwedge_{\lambda(v)<\alpha} \Big(\|v \in u\|^{\perp} \vee \|\exists t\Psi(v,t) \Longleftrightarrow \exists t'(t' \in u' \wedge \Psi(z,t'))\|\Big) \\
\overset{(6.6)}{=}\; &\bigwedge_{\lambda(v)<\alpha} \Big(\|v \in u\|^{\perp} \vee \top\Big) \\
=\; &\top
\end{aligned}$$

□

Satz 6.10 (Fundierungsaxiom)
Jede Ausprägung $\exists y\Psi(y) \Longrightarrow \exists y(\Psi(y) \wedge \neg\exists z(\Psi(z) \wedge z \in y))$ *des Fundierungsaxioms ist in* $\mathcal{N}$ *gültig.*

Beweis: Seien $x_1, \ldots, x_n$ die von y verschiedenen freien Variablen von $\Psi(y)$ und seien $u_1, \ldots, u_n \in TL$. Ich kürze $\Psi(y, u_1, \ldots, u_n)$ durch $\Psi(y)$ ab. Damit ist nun $\|\exists y\Psi(y)\| \leq \|\exists y(\Psi(y) \wedge \neg\exists z(\Psi(z) \wedge z \in y))\|$ zu zeigen. Angenommen, diese Ungleichung stimmt nicht. Dann existiert ein $a \in B$ mit $a\,\|\exists y(\Psi(y) \wedge \neg\exists z(\Psi(z) \wedge z \in y))\| = \perp$ und $\perp < a \leq \|\exists y\Psi(y)\|$. Es gilt $\|\exists y\Psi(y)\| = \bigvee_{v\in TL} \|\Psi(v)\|$, also $\perp < a = \bigvee_{v\in TL} a\,\|\Psi(v)\|$. Sei nun w ein Term mit $a\,\|\Psi(w)\| > \perp$, so daß $\lambda(w)$ minimal ist. Gemäß Lemma 6.8 gilt

$$\|\exists z(z \in w \wedge \Psi(z))\| = \bigwedge_{\lambda(w')<\lambda(w)} \|w' \in w \wedge \Psi(w')\|\,.$$

Für jedes w' mit $\lambda(w') < \lambda(w)$ gilt $a\,\|\Psi(w')\| = \perp$ aufgrund der Minimalität von $\lambda(w)$. Damit folgt

$$a\,\|\exists z(z \in w \wedge \Psi(z))\| = \bigvee_{\lambda(w')<\lambda(w)} \|w' \in w\|\,a\,\|\Psi(w')\| = \perp\,.$$

Folglich gilt nun $a\,\|\Psi(w) \wedge \neg\exists z(z \in w \wedge \Psi(z))\| = a\,\|\Psi(w)\| > \perp$ und damit sogar $a\,\|\exists y(\Psi(y) \wedge \neg\exists z(z \in y \wedge \Psi(z))\| > \perp$, im Widerspruch zur Annahme. □

Das Unendlichkeitsaxiom beweise ich später in Satz 7.8. Damit ist nun gezeigt, daß das Axiom (i) von SP in $\mathcal{N}$ gültig ist.

Da jetzt die Axiome von ZF in $\mathcal{N}$ gelten, können nun auch Formeln Φ der erweiterten Sprache in $\mathcal{N}$ benutzt werden, auch wenn nicht genau gesagt wird, wie die neu definierten Symbole in Φ nun genau eliminiert werden sollen. Denn wenn man eine Formel Φ der erweiterten Sprache auf verschiedene Art und Weisen rückübersetzt in Formeln der primitiven Sprache, so werden diese Formeln in ZF äquivalent sein und damit dieselbe Bewertung erhalten. Somit habe ich nun sogar die Möglichkeit, in Formeln in $\mathcal{N}$ Ausdrücke der deutschen Sprache, wie z. B. „x ist transitiv“, zu benutzen.

Kapitel 7

Die Bewertung der Axiome (iii) und (iv) von SP

In diesem Kapitel möchte ich die Gültigkeit der Axiome (iii) und (iv) nachweisen. Der Beweis nutzt vor allem diverse Absolutheitsergebnisse aus, so daß ich erst einmal den Begriff *Absolutheit* definieren und dessen hier wichtige Konsequenzen nachweisen will.

Definition 7.1 Sei M ein einstelliges Prädikatensymbol. Statt $M(x)$ schreibt man auch $x \in M$. Ist nun Φ eine Formel aus ZF, so sei $\underline{\Phi^{(M)}}$ die Formel, die man aus Φ erhält, indem man jeden Quantor $\exists x$ durch $(\exists x \in M)$ (d. h. durch $\exists x(M(x) \wedge \ldots))$ und entsprechend jeden Quantor $\forall x$ durch $(\forall x \in M)$ (d. h. durch $\forall x(M(x) \Longrightarrow \ldots))$ ersetzt. Nun sei ZF_M das aus folgenden Axiomen bestehende Axiomensystem:

(M1) Alle Axiome von ZF, wobei die Ersetzungs– und Aussonderungsaxiome auch das Prädikat M enthalten dürfen,

(M2) $y \in M \wedge x \in y \Longrightarrow x \in M$ (d. h. M ist transitiv) und

(M3) alle Formeln $\Phi^{(M)}$, wobei Φ ein Axiom von ZF ist.

Offensichtlich ist für jeden Satz Φ von ZF nun $\Phi^{(M)}$ ein Satz von ZF_M. Eine Formel Φ von ZF nennt man absolut, wenn gilt:

$$\mathrm{ZF}_M \vdash x_1, \ldots, x_n \in M \Longrightarrow (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \Phi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n)) .$$

Man kann M gewissermaßen als ein *inneres Modell* von ZF betrachten. Eine Formel Φ bezieht sich dabei auf das „normale große“ Modell, und die Relativierung $\Phi^{(M)}$ macht dieselbe Aussage wie Φ für das kleine Modell, also M. Der Begriff „absolut“ für eine Formel besagt also, daß eine Formel genau dann in dem großen Modell gültig ist, wenn sie in dem kleinen Modell M gültig ist. Ähnliche Betrachtungen kann man natürlich auch für Relationen und Funktionen machen, und dieses wird auch gleich geschehen. Es stellt sich heraus, daß die meisten elementaren Formeln oder Terme absolut sind, wie z. B. $\emptyset$, $\subseteq$, (x, y), „x ist transitiv“ etc. (siehe dazu Lemma 7.4). Wenn aber Kardinalzahleigenschaften nötig sind, um etwas zu beschreiben, so geht häufig die Absolutheit verloren. Nicht absolut sind so z. B. $\mathfrak{P}(x)$, ω_1, $|x| \leq |y|$ oder $\mathrm{cf}(x)$ (die Kofinalität von x).

Definition 7.2 Für neu definierte Relationssymbole R, Funktionssymbole F und Formeln oder Terme Ψ der erweiterten Sprache werden nun induktiv deren Relativierungen auf M, die mit $\underline{R^{(M)}}$, $\underline{F^{(M)}}$ und $\underline{\Psi^{(M)}}$ bezeichnet werden, definiert. Weiterhin wird gezeigt, daß folgendes gilt: Ist Γ die Definition eines neuen Symboles, so ist $\Gamma^{(M)}$ ein Satz von ZF_M.

(i) Sei Ψ eine Formel oder ein Term, der bereits definierte Relationssymbole $R_1, \ldots, R_k$ und bereits definierte Funktionssymbole $F_1, \ldots, F_l$ enthält. Dann erhält man $\Psi^{(M)}$ aus Ψ, indem man jeden Quantor $\exists x$ durch $(\exists x \in M)$, entsprechend jeden Quantor $\forall x$ durch $(\forall x \in M)$ und Relationssymbole R_i bzw. Funktionssymbole F_i durch $R_i^{(M)}$ bzw. $F_i^{(M)}$ ersetzt.

(ii) Das neue Relationssymbol R werde durch

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (R(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \Phi(x_1, \ldots, x_n)) \tag{7.1}$$

definiert, wobei Φ eine Formel der erweiterten Sprache ist, in der nur bereits definierte Symbole der erweiterten Sprache vorkommen. Dann definiert man $R^{(M)}$ in ZF_M durch

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (R^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \Phi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n))\,.$$

Ist nun Γ die Definition von R, d. h. die Formel (7.1), so ist $\Gamma^{(M)}$

$$(\forall x_1 \in M) \ldots (\forall x_n \in M)(R^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) \Longleftrightarrow \Phi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n))$$

und damit offensichtlich ein Satz von ZF_M.

(iii) Das neue Funktionssymbol F werde durch

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y (F(x_1, \ldots, x_n) = y \Longleftrightarrow \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)) \tag{7.2}$$

definiert, wobei Φ eine Formel der erweiterten Sprache ist, in der nur bereits definierte Symbole der erweiterten Sprache vorkommt, und für die in ZF der Satz

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \forall z (\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) \Longleftrightarrow z = y)) \tag{7.3}$$

gilt. Es gilt nun in ZF_M folglich der Satz

$$(\forall x_1 \in M) \ldots (\forall x_n \in M)(\exists y \in M)(\forall z \in M)(\Phi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n, z) \Longleftrightarrow z = y))\,,$$

also ist $F|M$ eine Funktion von M nach M. Damit ist nun folgende Definition von $F^{(M)}$ möglich:

$$F^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) = y \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n, y \in M \wedge \Phi^{(M)}(x_1, \ldots, x_n, y)) \vee (\bigvee_{1 \leq i \leq n} x_i \notin M \wedge y = \emptyset).$$

Ist nun Γ die Definition von F, d. h. die Formel (7.2), so ist $\Gamma^{(M)}$ wie in Fall (i) ein Satz von ZF_M.

Eine Formel Φ der erweiterten Sprache nennt man nun absolut, wenn

$$ZF_M \vdash (\forall x_1 \in M) \dots (\forall x_n \in M)(\Phi^{(M)}(x_1, \dots, x_n) \iff \Phi(x_1, \dots, x_n))$$

gilt. Ebenso heißt ein Term τ absolut, wenn

$$ZF_M \vdash (\forall x_1 \in M) \dots (\forall x_n \in M)(\tau^{(M)}(x_1, \dots, x_n) = \tau(x_1, \dots, x_n))$$

gilt. Wie ich bereits angedeutet habe, gilt folgendes für jedes neue Funktionssymbol F in ZF_M: $x_1, \dots, x_n \in M \Longrightarrow F^{(M)}(x_1, \dots, x_n) \in M$. Man beachte auch, daß für zwei verschiedene Definitionen eines Relations– oder Funktionssymboles, die in ZF äquivalent sind, aufgrund von Axiom (M3) auch die Definitionen derer Relativierungen in ZF_M äquivalent sind. Aus diesem Grunde ist es egal, welche Definition eines neuen Symboles man wählt, da verschiedene Definitionen zu keinen Unterschieden führen.

Die beiden nächsten Lemmata sind ein Überblick über die wichtigsten Absolutsheitsergebnisse, die man auch in jedem Buch über die Mengenlehre wiederfindet (empfehlenswert halte ich dabei das Werk [Kune80] von Kunen).

Lemma 7.3 *In* ZF *gelten:*

(i) Ist Φ eine absolute Formel und ist Ψ zu Φ äquivalent, so ist auch Ψ absolut.

(ii) Ist τ ein Term, so gilt: $\mathrm{ZF} \vdash x_1, \dots, x_n \in M \Longrightarrow \tau^{(M)}(x_1, \dots, x_n) \in M$.

(iii) $\tau(x_1, \dots, x_n)$ ist genau dann absolut, wenn $y = \tau(x_1, \dots, x_n)$ eine absolute Formel ist.

(iv) Wird das neue Relationssymbol R durch $R(x_1, \dots, x_n) \iff \Phi(x_1, \dots, x_n)$ definiert und ist Φ absolut, so ist es auch R.

(v) Wird das neue Funktionssymbol F durch $F(x_1, \dots, x_n) = y \iff \Phi(x_1, \dots, x_n, y)$ definiert und ist Φ absolut, so ist es auch F.

(vi) Sind die Formel $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ und die Terme $\tau(x_1, \dots, x_n)$ sowie $\tau_i(x_1, \dots, x_m)$, $1 \leq i \leq n$ absolut, so sind es auch $\tau(\tau_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \tau_n(x_1, \dots, x_m))$ und $\Phi(\tau_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \tau_n(x_1, \dots, x_m))$.

(vii) Jede Formel, die sich aus absoluten Formeln durch Verknüpfung mit Junktoren und Anwendung eingeschränkter Quantoren (d. h. Quantoren, die die Form $(\exists x \in y)$ oder $(\forall x \in y)$ haben) ergibt, ist wieder absolut.

(viii) Sind $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ absolute Formeln (mit eventuell weiteren freien Variablen außer x), so daß $\mathrm{ZF}_M \vdash \forall x \Phi(x) \iff \exists x \Psi(x)$ gilt, so sind auch $\exists x \Phi(x)$ und $\forall x \Psi(x)$ absolut.

Beweis: (i) Seien $x_1, \ldots, x_n \in M$. Dann folgt:

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n) \overset{\text{Vor.}}{\iff} \Phi(x_1,\ldots,x_n) \overset{\text{Vor.}}{\iff} \Phi^{(M)}(x_1,\ldots,x_n) \overset{\text{(M3)}}{\iff} \Psi^{(M)}(x_1,\ldots,x_n)$$

(ii) Für neue Funktionssymbole F gilt $x_1, \ldots, x_n \in M \Longrightarrow F^{(M)}(x_1, \ldots, x_n) \in M$. Damit läßt sich (ii) mit Induktion beweisen.

(iii) ist trivial.

(iv) und (v) sind Folgerungen aus (i) und (iii).

(vi) folgt sofort mit Hilfe von (ii).

(vii) Offensichtlich ergibt die Verknüpfung absoluter Formeln mit Junktoren wieder absolute Formeln. Sei nun also $\Psi(x) \equiv (\exists x \in y)\Phi(x)$ und $\Phi(x)$ absolut. Dann gilt $\Psi^{(M)}(x) \equiv (\exists x \in M)(x \in y \wedge \Phi^{(M)}(x))$. Gilt nun $y \in M$, so folgt auch $x \in M$, da M transitiv ist. Weiterhin gilt $\Phi(x) \iff \Phi^{(M)}(x)$ nach Voraussetzung. Damit ist für $y \in M$ die obige Relativierung äquivalent zu $(\exists x \in y)\Phi(x)$. Der Beweis für $(\forall x \in y)\Phi(x)$ wird analog geführt.

(viii) Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\exists x \in M)\Phi^{(M)}(x) &\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} (\exists x \in M)\Phi(x) \\
&\Longrightarrow \exists x \Phi(x) \\
&\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \forall x \Psi(x) \\
&\Longrightarrow (\forall x \in M)\Psi(x) \\
&\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} (\forall x \in M)\Psi^{(M)}(x) \\
&\overset{\text{(M3)}}{\Longrightarrow} (\exists x \in M)\Phi^{(M)}(x)
\end{aligned}$$

□

Lemma 7.4 *Die folgenden Terme und Formeln sind absolut:*

$\{x, y\}$, $\{x\}$, (x, y), „x ist ein geordnetes Paar“, $\rho_i(x)$ (d. h. das i-te Element von x, wenn x ein geordnetes Paar ist, und $\emptyset$ sonst) für $i = 1, 2$, $x \leq y$ (siehe Definition 3.12), $x \cup y$, $x \cap y$, $x \setminus y$, $x \subseteq y$, $\mathrm{Rel}(f)$, $\mathrm{Fkt}(f)$, „f ist eine injektive Funktion“, $\mathrm{Vb}(f)$, $\mathrm{Nb}(f)$, $f(x)$ (aufgefaßt als ein Term mit den freien Variablen f und x), $f|x$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, „x ist eine transitive Menge“, „x ist ein Ordinalzahl“, „x ist eine endliche Ordinalzahl“, $\rho(x)$, „f ist eine endliche Folge“, „x ist eine Substitutionsabbildung“, „q ist ein Intervallbezeichner“, „f und g sind als Funktionen unverträglich“.

Beweis: Alle Aussagen werden nacheinander durch verschiedene Anwendungen von Lemma 7.3 geführt. Ich möchte den Beweis hier nur für den schwierigsten Fall $\rho(x)$ führen.

Sei $\Phi(f)$ die Formel

$$\begin{aligned}
\Phi(f) \equiv\ & \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{Vb}(f) \text{ ist transitiv } \wedge \mathrm{Nb}(f) \subseteq \mathrm{On} \\
& \wedge (\forall x \in \mathrm{Vb}(f))\,[(\forall y \in \mathrm{Vb}(f))(y \in x \Longrightarrow f(y) \in f(x)) \\
& \qquad \wedge \neg(\exists z \in f(x))(\forall y \in \mathrm{Vb}(x))(y \in x \Longrightarrow f(y) \in z)]
\end{aligned}$$

Die Formel $\Phi(f)$ sagt aus, daß f ein Anfangsstück von ρ ist. Um das zu sehen, beachte man, daß $\rho : V \to \mathrm{On}$ die Funktion ist, für die $\rho(x) = \bigvee\{\rho(y) + 1 \,|\, y \in x\}$ für jede Menge x gilt. Der zweite Teil von Φ sagt nun offensichtlich aus, daß $f(x) \geq f(y) + 1$ für jedes $y \in x$, $x \in \mathrm{Vb}(f)$ gilt. Der dritte Teil dagegen gewährleistet, daß es keine kleinere Ordinalzahl z als $f(x)$ gibt, die $f(x) \geq f(y) + 1$ für jedes $y \in x$ erfüllt. Damit gilt $f(x) = \bigvee\{f(y) + 1 \,|\, y \in x\}$ für jedes $x \in \mathrm{Vb}(f)$.

$\Phi(f)$ entsteht aus der gemäß Lemma 7.3(vii) und Ergebnissen aus Lemma 7.4 absoluten Formel

$$\begin{aligned}\Phi(f) \equiv\;& f \text{ ist eine Funktion } \wedge x' \text{ ist transitiv } \wedge x'' \subseteq \mathrm{On}\\ &\wedge(\forall x \in x')\,[(\forall y \in x')(y \in x \Longrightarrow y'' \in y')\\ &\quad\wedge\neg\,(\exists z \in y')(\forall y \in x')(y \in x \Longrightarrow y'' \in z)]\,,\end{aligned}$$

indem man x' durch $\mathrm{Vb}(f)$, x'' durch $\mathrm{Nb}(f)$, y' durch $f(x)$ und y'' durch $f(y)$ ersetzt. Damit ist $\Phi(f)$ gemäß Lemma 7.3(vi) und Ergebnissen aus Lemma 7.4 selber auch absolut. Es gilt nun

$$y = \rho(x) \Longleftrightarrow \exists f(\Phi(f) \wedge x \in \mathrm{Vb}(f) \wedge f(x) = y) \Longleftrightarrow \forall f(\Phi(f) \wedge x \in \mathrm{Vb}(f) \wedge f(x) = y)\,,$$

womit nun mit Lemma 7.3(viii) nun $y = \rho(x)$ absolut ist. □

Lemma 7.5 *Die Formel $x \in S \wedge y \in x \Longrightarrow y \in S$ (d. h. S ist transitiv) ist in in $\mathcal{N}$ gültig.*

Man beachte, daß S in ZF die Allklasse V und damit in ZF trivialerweise transitiv ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\|x \in S \wedge y \in x\| &= \bigvee_{s\in S} \|x = \mathbf{s}\|\,\|y \in x\|\\ &\leq \bigvee_{s\in S} \|y \in \mathbf{s}\|\\ &= \bigvee_{s\in S}\bigvee_{t\in s} \|y = \mathbf{t}\|\\ &\leq \bigvee_{t\in S} \|y = \mathbf{t}\|\\ &= \|y \in S\|\end{aligned}$$

□

Lemma 7.6 *Sei Φ eine Formel aus* ZF. *Dann gelten*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \|\Phi^{(S)}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)\| = \top \textit{ und}$$
$$\neg\Phi(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \|\Phi^{(S)}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)\| = \bot\,.$$

Beweis: Der Beweis wird für beide Implikationen gleichzeitig per Induktion über den Aufbau von Formeln (aus ZF) geführt.

Der Induktionsanfang ergibt sich aus den Lemmata 5.5 und und 5.6. Der Induktionsschritt bei der Verknüpfung von Formeln mittels Junktoren ergibt sich unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Um schließlich den Fall $\Phi = \exists x\Psi$ zu beweisen, beachte man, daß Φ genau dann in ZF gültig ist, wenn es ein $x \in S$ mit $\Psi(x)$ gibt. Somit ergibt sich die Aussage des Satzes für Φ mittels Lemma 6.4(iii) nun auch aus der Induktionsvoraussetzung. $\Box$

Lemma 7.7 *Sei* Φ *eine absolute Formel aus* ZF. *Dann gelten*

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \|\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\| = \top \text{ und}$$
$$\neg\Phi(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \|\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\| = \bot\,.$$

Beweis: Es gelte $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$. Da Φ absolut ist und da (M1) – (M3) in $\mathcal{N}$ gelten, folgt

$$\|(\forall x_1 \in S)\ldots(\forall x_n \in S)(\Phi^{(S)}(x_1,\ldots,x_n) \Longleftrightarrow \Phi(x_1,\ldots,x_n))\| = \top\,.$$

Mit Lemma 6.4(iii) folgt $\|(\Phi^{(S)}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n) \Longleftrightarrow \Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n))\| = \top$, mit Lemma 7.6 gilt $\|(\Phi^{(S)}(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\| = \top$, woraus nun $\|\Phi(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)\| = \top$ folgt.

Der zweite Teil des Lemmas wird analog bewiesen. $\Box$

Die beiden eben bewiesenen Lemmata bilden eine wesentliche Nahtstelle zwischen den Theorien ZF und SP. Es ist ja die Intention bei der gesamten Beweisführung, daß man eine Art Einbettung des Modelles von ZF via das Prädikat S und die Konstantensymbole $\mathbf{s}$, $s \in S$ in das Modell $\mathcal{N}$ von SP hat. So möchte man z. B. viele (absolute) Eigenschaften, die bestimmte Mengen x in ZF haben, auch für die entsprechenden Mengen in $\mathcal{N}$, also die Mengen mit dem Namen $\mathbf{x}$, nachweisen können. Daß dieses in der Tat auch möglich ist, wird gerade durch die beiden letzten Lemmata nachgewiesen. Es werden nämlich jetzt die hier (in ZF) bewiesenen Absolutheitsresultate auf $\mathcal{N}$ übertragen, indem man M durch die Klasse S der Standardmengen ersetzt. Die Gültigkeit von Axiom (M1) in $\mathcal{N}$ wurde bereits gezeigt. Aufgrund von Lemma 7.5 ist auch Axiom (M2) in $\mathcal{N}$ gültig, und mit Lemma 7.6 ist gilt schließlich Axiom (M3) in $\mathcal{N}$. Wie nun der „Übergang“ von ZF nach SP prinzipiell vonstatten geht, möchte ich an einem ganz kleinen Beispiel erläutern.

Sei dazu $\alpha \in S$ eine Ordinalzahl. Es ist zu erwarten, daß α in $\mathcal{N}$ eine Ordinalzahl ist, d. h. es sollte $\|\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{On}\| = \top$ gelten. Doch das gilt nicht per Definition, sondern muß bewiesen werden. Da aber $x \in \mathrm{On}$ eine absolute Formel ist, folgt nun $\|\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{On}\| = \top$ unmittelbar aus Lemma 7.7.

Satz 7.8 (Unendlichkeitsaxiom)
Es ist $\exists x((\exists y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \wedge (\forall z \in x)(\exists t \in x)(z \neq \emptyset \Rightarrow z = t \cup \{t\}))$, *d. h. das Unendlichkeitsaxiom, in* $\mathcal{N}$ *gültig. Es gilt weiterhin* $\boldsymbol{\omega} = \omega$ *in* $\mathcal{N}$.

Beweis: Sei ZF_f die Mengenlehre ZF ohne das Unendlichkeitsaxiom. Die in diesem Kapitel getroffenen Definitionen und die nachfolgenden Lemmata 7.3 und 7.4 können auch in ZF_f durchgeführt werden; den so resultierenden Absolutheitsbegriff möchte ich ZF_f-absolut nennen.

Man setze

$$\Phi(x) \equiv (\exists y \in x) \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x) \wedge (\forall z \in x)(\exists t \in x)(z \neq \emptyset \Rightarrow z = t \cup \{t\})\,.$$

Mit den nun in ZF_f bewiesenen Lemmata 7.3 und 7.4 ist Φ ZF_f-absolut. Man kann weiterhin in ZF_f zeigen, daß für Φ die Aussage von Lemma 7.7 gilt. (Da dieses Lemma im Beweis Lemma 7.6 benötigt, das wiederum mittels vollständiger Induktion bewiesen wird, meine ich im Gegensatz zu Halpern und Lévy, daß man es in seiner allgemeinen Form nicht analog in ZF_f beweisen kann. Trotzdem kann man in ZF_f die Induktion bis zu Φ durchführen, so daß die Aussage des Lemmas auf Φ zutrifft.) Da offensichtlich $\Phi(\omega)$ zutrifft, folgt nun $\|\Phi(\boldsymbol{\omega})\| = \top$ und damit auch $\|\exists x \Phi(x)\| = \top$.

In ZF gilt natürlich $\Phi(x) \Longleftrightarrow x = \omega$, also gilt dieses auch in $\mathcal{N}$. Da auch $\Phi(\boldsymbol{\omega})$ gültig ist, folgt nun $\boldsymbol{\omega} = \omega$ in $\mathcal{N}$. $\square$

Satz 7.9 *Die Formel $\forall x : x \in \mathrm{On} \Longrightarrow x \in S$, d. h. die Aussage „Jede Ordinalzahl ist eine Standardmenge“, ist in $\mathcal{N}$ gültig.*

Beweis: Sei u ein beliebiger Term und sei $\alpha > \lambda(u)$. In $\mathcal{N}$ gilt jeder Satz aus ZF, also folgt insbesondere

$$\|u \in \mathrm{On} \wedge \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{On} \Longrightarrow u \in \boldsymbol{\alpha} \vee u = \boldsymbol{\alpha} \vee \boldsymbol{\alpha} \in u\| = \top\,. \tag{7.4}$$

Mit den Lemmata 7.4 und 7.7 gilt $\|\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{On}\| = \top$. Wegen $\rho(\alpha) = \alpha > \lambda(u)$ folgen aus Lemma 6.5 weiterhin $\|u = \boldsymbol{\alpha}\| = \perp$ und $\|\boldsymbol{\alpha} \in u\| = \perp$. Also folgt aus (7.4) nun $\|u \in \mathrm{On} \Longrightarrow u \in \boldsymbol{\alpha}\| = \top$. Aus den Formeln $u \in \mathrm{On} \Longrightarrow u \in \alpha$, „$S$ ist transitiv“ und $\alpha \in S$ läßt sich $u \in \mathrm{On} \Longrightarrow u \in S$ herleiten. Da aber S nach Lemma 7.5 auch in $\mathcal{N}$ transitiv ist und da $\|\boldsymbol{\alpha} \in S\| = \top$ gilt, folgt damit $\|u \in \mathrm{On} \Longrightarrow u \in S\| = \top$. $\square$

Satz 7.10 *„Jede endliche Teilmenge von S ist ein Element von S“ ist in $\mathcal{N}$ gültig.*

Beweis: Da in $\mathcal{N}$ auch jede Ausprägung der vollständigen Induktion gültig ist, reicht zu zeigen, daß $\emptyset \in S$ und $\forall x \forall y (x \in S \wedge y \in S \Longrightarrow x \cup \{y\} \in S)$ gelten. Die erste Formel gilt mit Lemma 7.3(ii), da $\emptyset$ nach Lemma 7.4 ein absoluter Term ist. Um die zweite Formel zu zeigen, muß man $\|\mathbf{s} \cup \{\mathbf{t}\} \in S\| = \top$ für beliebige s, t zeigen. Sei $r = s \cup \{t\}$. Mit den Lemmata 7.3(vi), 7.4 und 7.7 folgt $\|\mathbf{r} = \mathbf{s} \cup \{\mathbf{t}\}\| = \top$. Da auch $\|\mathbf{r} \in S\| = \top$ gilt, folgt $\|\mathbf{s} \cup \{\mathbf{t}\} \in S\| = \top$. $\square$

Ich möchte bemerken, daß es für diesen Beweis nicht ausreicht, ein Argument der Form „da S ein Modell von ZF ist, muß S die leere Menge enthalten und abgeschlossen gegen die Bildung von $x \cup \{y\}$ sein“ zu bringen. Das funktioniert deshalb nicht, weil dieses sozusagen nur aus der Sicht innerhalb von S gilt (oder um es im Stil von Kunen auszudrücken (siehe [Kune80]): „die Leute, die in S wohnen, sehen S als ein Modell von ZF an, daß z. B. die leere Menge enthält). Doch es ist nachzuweisen, daß *es in $\mathcal{N}$ gültig ist*, daß die leere Menge ein Element von S ist und S gegenüber $x \cup \{y\}$ abgeschlossen ist. Daß das eigenlich dasselbe ist, ist nicht per se evident, sondern wird gerade durch die diversen Absolutheitsergebnisse nachgewiesen.

Lemma 7.11 *Sei* $\Gamma(x)$ *eine absolute Formel aus* ZF*, für die* $\Gamma(x) \Longrightarrow x \in S$ *in* $\mathcal{N}$ *gültig ist. Dann folgen:*

(i) Für $u \in TL$ *gilt* $\|\Gamma(u)\| = \bigvee_{\Gamma(s)} \|u = \mathbf{s}\|$.

(ii) $\|\exists x(\Gamma(x) \wedge \Phi(x))\| = \bigvee_{\Gamma(s)} \|\Phi(\mathbf{s})\|$, $\|\forall x(\Gamma(x) \Longrightarrow \Phi(x))\| = \bigwedge_{\Gamma(s)} \|\Phi(\mathbf{s})\|$.

(iii) $\|u \in \mathrm{On}\| = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{On}} \|u = \boldsymbol{\alpha}\|$.

(iv) $\|(\exists \alpha \in \mathrm{On})\Phi(\alpha)\| = \bigvee_{\alpha \in \mathrm{On}} \|\Phi(\boldsymbol{\alpha})\|$, $\|(\forall \alpha \in \mathrm{On})\Phi(\alpha)\| = \bigwedge_{\alpha \in \mathrm{On}} \|\Phi(\boldsymbol{\alpha})\|$.

Beweis: (i) Nach Lemma 7.7 folgt $\|\Gamma(\mathbf{s})\| = \top$ aus $\Gamma(s)$, und es folgt $\|\Gamma(\mathbf{s})\| = \bot$ aus $\neg\Gamma(s)$. Damit gilt:

$$\|\Gamma(u)\| \overset{\text{Vor.}}{=} \|u \in S \wedge \Gamma(u)\| = \bigvee_{s \in S} \|u = \mathbf{s}\| \, \|\Gamma(u)\| = \bigvee_{s \in S} \|u = \mathbf{s}\| \, \|\Gamma(\mathbf{s})\| = \bigvee_{\Gamma(s)} \|u = \mathbf{s}\|$$

(ii) folgt mit Lemma 6.4 aus (i), indem man $T = \{\mathbf{s} \mid \Gamma(s)\}$ setzt.

(iii) und (iv) folgen aus (i) und (ii), indem man $\Gamma(x) \equiv x \in \mathrm{On}$ setzt. Die zur Anwendung von (i) und (ii) nötigen Voraussetzungen folgen aus Lemma 7.4 und Satz 7.9. □

Satz 7.12 *In* $\mathcal{N}$ *gelten* $(\forall \alpha \in \mathrm{On})(S \cap R(\alpha) \in S)$ *und* $(\forall \alpha \in \mathrm{On})(F \cap R(\alpha) \in S)$.

Beweis: Zum Beweis der ersten Formel reicht es wegen Lemma 7.11(iv) zu zeigen, daß $\|S \cap R(\boldsymbol{\alpha}) \in S\| = \top$ für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt. Mit $s = R(\alpha)$ gilt $\forall x(x \in s \Longleftrightarrow \rho(s) < \alpha)$, also mit Lemma 7.6 auch $\|(\forall x \in S)(x \in \mathbf{s} \Longleftrightarrow \rho^{(S)}(x) < \boldsymbol{\alpha})\| = \top$. Es ist nach Lemma 7.4 aber die Funktion ρ absolut, d. h. in $\mathcal{N}$ gilt $(\forall x \in S)(\rho^{(S)}(x) = \rho(x))$. Damit folgt $\|(\forall x \in S)(x \in \mathbf{s} \Longleftrightarrow \rho(x) < \boldsymbol{\alpha})\| = \top$. Da für jedes $x \in S$ auch $\|\mathbf{x} \in S\| = \top$ gilt, folgt mit Lemma 6.4(iii) weiterhin $\|(\forall x \in S)(x \in \mathbf{s} \Longleftrightarrow x \in S \wedge \rho(x) < \boldsymbol{\alpha})\| = \top$, d. h. $\|\mathbf{s} = S \cap R(\boldsymbol{\alpha})\| = \top$. Mit $\|\mathbf{s} \in S\| = \top$ gilt damit auch $\|S \cap R(\boldsymbol{\alpha}) \in S\| = \top$.

Die zweite Formel wird analog zur ersten Formel bewiesen. □

Gemäß der Sätze 7.5, 7.10 und 7.12 gilt nun Axiom (iii) in $\mathcal{N}$. Der nächste Satz wird auch die Gültigkeit von Axiom (iv) in $\mathcal{N}$ nachweisen.

Satz 7.13 *„F ist eine Funktion von* On *auf S" ist in* $\mathcal{N}$ *gültig.*

Beweis: Es sind die folgenden beiden Gleichungen zu zeigen:

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in F)(x \text{ ist geordnetes Paar } &\wedge p_1(x) \in \mathrm{On} \wedge p_2(x) \in S \\ &\wedge (\forall y \in F)(p_1(x) = p_1(y) \Longrightarrow x = y))\| = \top\,,\end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\|(\forall\alpha \in \mathrm{On})(\exists r \in F)(p_1(r) = \alpha) \wedge (\forall z \in S)(\exists s \in F)(p_2(s) = z)\| = \top\,. \tag{7.6}$$

Um (7.5) und (7.6) zu zeigen, beachte man, daß wegen Lemma 6.4 für beliebige Formeln Φ folgende Gleichungen gelten:

$$\|(\exists x \in F)\Phi(x)\| = \bigvee_{x\in F} \|\Phi(\mathbf{x})\|\,,\ \|(\forall x \in F)\Phi(x)\| = \bigwedge_{x\in F} \|\Phi(\mathbf{x})\|\,. \tag{7.7}$$

Um (7.5) zu beweisen, muß man also für beliebige $x, y \in F$ folgendes zeigen:

$$\|\mathbf{x} \text{ ist geordnetes Paar } \wedge p_1(\mathbf{x}) \in \mathrm{On} \wedge p_2(\mathbf{x}) \in S \wedge (p_1(\mathbf{x}) = p_2(\mathbf{y}) \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})\| = \top\,.$$

Diese Gültigkeit dieser Gleichung folgt sofort aus den Absolutheitsergebnissen in den Lemmata 7.3, 7.4 und 7.7.

Um (7.6) zu beweisen, seien $\alpha \in \mathrm{On}$ und $z \in S$. Setzt man $r = (\alpha, F(\alpha))$ und sind s und β so gewählt, daß $s = (\beta, z) \in F$ gilt, so reicht es wegen (7.7), Lemma 6.4(iii) und Lemma 7.11(iv), wenn man

$$\|p_1(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \wedge p_2(\mathbf{s}) = \mathbf{z}\| = \top$$

zeigt. Wie oben folgt auch die Gültigkeit dieser Gleichung aus den Absolutheitsergebnissen in den Lemmata 7.3, 7.4 und 7.7. □

Kapitel 8

Die Bewertung der Axiome (vi), (ii) und (v) von SP

Um nun die Gültigkeit der Axiome (vi), (ii) und (v) in $\mathcal{N}$ nachzuweisen, möchte ich zunachst einen Weg angeben, um auf sinnvolle Art und Weise Namen in $\mathcal{L}$ für endliche Mengen von Termen und für Belegungen zu definieren. Dieses wird in den ersten Definitionen und Lemmata geschehen.

Definition 8.1 Es sei $(u_0, \dots, u_{n-1})$ eine Folge von Elementen aus TL. Setzt man dann $\alpha = \max\{\lambda(u_i) + 1 \,|\, i < n\}$, so sei

$$\{u_0, \dots, u_{n-1}\}^* = \Diamond_\alpha x(x = u_0 \vee \dots \vee x = u_{n-1}) \text{ und}$$

$$(u, v)^* = \{\{u\}^*, \{u, v\}^*\}^* \,.$$

Lemma 8.2 *Es gelten*

(i) $\|u \in \{u_0, \dots, u_{n-1}\}^*\| = \bigvee_{i<n} \|u = u_i\| \,,$

(ii) $\|\exists x(x \in \{u_0, \dots, u_{n-1}\}^* \wedge \Phi(x))\| = \bigvee_{i<n} \|\Phi(u_i)\| \,,$

$\|\forall x(x \in \{u_0, \dots, u_{n-1}\}^* \Longrightarrow \Phi(x))\| = \bigwedge_{i<n} \|\Phi(u_i)\| \,,$

(iii) $\|\{u, v\}^* = \{u, v\}\| = \top$ *und*

(iv) $\|(u, v)^* = (u, v)\| = \top \,.$

Beweis: (i) Es sei $\alpha = \max\{\lambda(u_i) + 1 \,|\, i < n\}$. Dann folgt:

$$\|u \in \{u_0, \dots, u_{n-1}\}^*\| \quad = \quad \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|u = v\| \, \|v = u_0 \vee \dots \vee v = u_{n-1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \bigvee_{i<n} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|u = v\| \, \|v = u_i\| \\
&\leq \bigvee_{i<n} \|u = u_i\| \\
&= \bigvee_{i<n} \|u = u_i\| \, \|u_i = u_0 \vee \ldots \vee u_i = u_{n-1}\| \\
&\leq \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|u = v\| \, \|u_i = u_0 \vee \ldots \vee u_i = u_{n-1}\| \\
&= \|u \in \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}^*\|
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i) unter Anwendung von Lemma 6.4(ii).
(iii) $\{u,v\}^* = \{u,v\}$ ist der Ausdruck

$$(\forall x \in \{u,v\}^*)(x = u \vee x = v) \wedge u \in \{u,v\}^* \wedge v \in \{u,v\}^* \, .$$

Mit (ii) und Lemma 5.4 zeigt man leicht, daß dieser Ausdruck die Bewertung $\top$ erhält.
(iv) schließlich folgt sofort aus (iii). □

Definition 8.3 Sei W die Menge aller Funktionen h mit $\mathrm{Vb}(h) \subset\subset \omega$ und $\mathrm{Nb}(h) \subset\subset \omega$, d. h. W ist die Menge aller Substitutionsabbildungen. Für jedes $h \in W$ sei $h^\#$ der Term $\{(\mathbf{i}, a_{h(i)})^* \mid i \in \mathrm{Vb}(h)\}^*$, d. h. $h^\# = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}^*$, wobei die u_i's die Terme $(\mathbf{i}, a_{h(i)})^*$, geordnet durch die i's, sind.

Lemma 8.4 *Für beliebige $h, k \in W$ gelten folgende Aussagen:*

(i) $\|h^\#$ *ist eine Belegung*$\| = \top$.

(ii) Für $d = \mathrm{Vb}(h)$ *gilt* $\|\mathbf{d} = \mathrm{Vb}(h^\#)\| = \top$.

(iii) Für $i \in \mathrm{Vb}(h)$ *gilt* $\|h^\#(\mathbf{i}) = a_{h(i)}\| = \top$.

(iv) Für $i \notin \mathrm{Vb}(h)$ *gilt* $\|(\mathbf{i}, a_j) \in h^\#\| = \bot$.

(v) Für $i \in \mathrm{Vb}(h)$ *gilt* $\|(\mathbf{i}, a_j) \in h^\#\| = \|a_j = a_{h(i)}\|$.

(vi) Gilt $h \subseteq k$, *so folgt* $\|h^\# \subseteq k^\#\| = \top$.

(vii) $\|(h \circ k)^\# = h^\# \circ k^\#\| = \top$.

Beweis: (i) Sei $\Phi(z,n)$ die Formel

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in z)(\forall y \in z)(x \text{ ist ein geordnetes Paar} \wedge p_1(x) \in n \wedge p_2(x) \in b \\
&\quad \wedge (p_1(x) = p_1(y) \Longrightarrow x = y)) \, .
\end{aligned}$$

Dann ist die Aussage „z ist eine Belegung“ in ZF äquivalent zu $(\exists n \in \omega)\Phi(z,n)$. Sei also ein n mit $n \supseteq \mathrm{Vb}(h)$ gewählt. Um $\|\Phi(h^{\#},\mathbf{n})\| = \top$ zu zeigen, muß man wegen Lemma 8.2(ii) für $(\mathbf{i}, a_{h(i)})^*$, $(\mathbf{j}, a_{h(j)})^*$ nun

$$\begin{aligned}\|((\mathbf{i}, a_{h(i)})^* \text{ ist geordnetes Paar} \wedge p_1((\mathbf{i}, a_{h(i)})^*) \in \mathbf{n} \wedge p_2((\mathbf{i}, a_{h(i)})^*) \in b \\ \wedge(p_1((\mathbf{i}, a_{h(i)})^*) = p_1((\mathbf{j}, a_{h(j)})^*) \Longrightarrow (\mathbf{i}, a_{h(i)})^* = (\mathbf{j}, a_{h(j)})^*))\| = \top\end{aligned}$$

beweisen. Das folgt aber aus Lemma 8.2(iii) und (iv). Da in $\mathcal{N}$ auch $\omega = \boldsymbol{\omega}$ gilt, folgt aus $\Phi(h^{\#},\mathbf{n})$ nun $(\exists n \in \omega)\Phi(h^{\#},n)$.

(ii) Es sei $d = \mathrm{Vb}(h)$. Mit den Lemmata 6.4(iv) und 8.2 folgt zunächst eine Inklusion:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{d} \subseteq \mathrm{Vb}(h^{\#})\| &= \|(\forall x \in \mathbf{d})(\exists y \in h^{\#})(p_1(y) = x)\| \\ &\overset{\text{Lem. 6.4}}{=} \bigwedge_{x\in d} \|(\exists y \in h^{\#})(p_1(y) = \mathbf{x})\| \\ &\overset{\text{Lem. 8.2}}{=} \bigwedge_{x\in d} \bigvee_{i\in \mathrm{Vb}(h)} \|p_1((\mathbf{i}, a_{h(i)})^*) = \mathbf{x}\| \\ &\overset{\text{Lem. 8.2}}{=} \bigwedge_{x\in d} \bigvee_{i\in d} \|\mathbf{i} = \mathbf{x}\| \\ &= \top\,.\end{aligned}$$

Es gilt in $\mathcal{N}$ auch die umgekehrte Inklusion:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Vb}(h^{\#}) \subseteq \mathbf{d}\| &= \|(\forall y \in h^{\#})(p_1(y) \in \mathbf{d})\| \\ &\overset{\text{Lem. 8.2}}{=} \bigwedge_{i\in \mathrm{Vb}(h)} \|p_1((\mathbf{i}, a_{h(i)})^*) \in \mathbf{d}\| \\ &\overset{\text{Lem. 8.2}}{=} \bigwedge_{i\in \mathrm{Vb}(h)} \|\mathbf{i} \in \mathbf{d}\| \\ &\overset{\text{Lem. 5.5}}{=} \top\,.\end{aligned}$$

Aus $\mathbf{d} \subseteq \mathrm{Vb}(h^{\#})$ und $\mathrm{Vb}(h^{\#}) \subseteq \mathbf{d}$ folgt in $\mathcal{N}$ auch $\mathbf{d} = \mathrm{Vb}(h^{\#})$.

(iii) Für $j \in \mathrm{Vb}(h)$ gilt $\|(\mathbf{j}, a_{h(j)})^* \in h^{\#}\| = \top$ nach Lemma 8.2(i). Mit Lemma 8.2 folgt damit auch die Gültigkeit von $(\mathbf{j}, a_{h(j)}) \in h^{\#}$ in $\mathcal{N}$. Da nach (i) $h^{\#}$ in $\mathcal{N}$ eine Funktion ist, muß in $\mathcal{N}$ auch $h^{\#}(\mathbf{j}) = a_{h(j)}$ gelten.

(iv)–(vii) werden mit Hilfe von Lemma 8.2 ähnlich berechnet. □

Lemma 8.5 *Es gelten folgende Aussagen:*

(i) $\|u \textit{ ist eine Belegung}\| = \bigvee_{h\in W} \|u = h^{\#}\|\,.$

(ii) Für $k \in W$ *gilt* $\|u \textit{ ist eine Belegung } \wedge u \supseteq k^{\#}\| = \bigvee_{h\in W \wedge h\supseteq k} \|u = h^{\#}\|\,.$

(iii) $\|\exists x(x \textit{ ist eine Belegung } \wedge \Phi(x))\| = \bigvee_{h\in W} \|\Phi(h^{\#})\|\,,$

$\|\forall x(x \textit{ ist eine Belegung } \Longrightarrow \Phi(x))\| = \bigwedge_{h\in W} \|\Phi(h^{\#})\|\,.$

Beweis: (i) Die Ungleichung $\geq$ folgt sofort aus Lemma 8.4(i). Die Aussage „u ist eine Belegung“ ist äquivalent zu

$$(\exists n \in \omega)(\mathrm{Fkt}(u) \wedge \mathrm{Vb}(u) \subseteq n \wedge (\forall i \in n)(i \notin \mathrm{Vb}(u) \vee i \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(i) \in b))\,.$$

Da in $\mathcal{N}$ auch $\omega = \boldsymbol{\omega}$ gilt, läßt sich die linke Seite von (i) zu

$$\bigvee_{n\in\omega} \|(\mathrm{Fkt}(u) \wedge \mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n} \wedge (\forall i \in \mathbf{n})(i \notin \mathrm{Vb}(u) \vee i \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(i) \in b)\|$$

berechnen. Den n-ten Summanden dieses Ausdrucks möchte ich mit c_n bezeichnen. Es ist nun also $c_n \leq \|u = h^{\#}\|$ für jedes $n \in \omega$ zu zeigen. Mit Lemma 6.4(iv) gilt

$$\begin{aligned}
c_n \overset{\text{Lem. 6.4}}{=} \;& \|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \\
& \wedge \bigwedge_{i<n} \|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u) \vee (\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(\mathbf{i}) \in b)\| \\
= \;& \|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \\
& \wedge \bigwedge_{i<n} \Big(\|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u)\| \vee \bigvee_{j<\omega} \|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(\mathbf{i}) = a_j\|\Big) \\
= \;& \|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \\
& \wedge \bigvee_{d\subseteq n \wedge g:d\to\omega} \Big(\bigwedge_{i\in n\setminus d} \|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u)\| \wedge \bigwedge_{i\in d} \|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(\mathbf{i}) = a_{g(i)}\|\Big) \\
= \;& \bigvee_{d\subseteq n \wedge g:d\to\omega} \Big(\|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \\
& \wedge \bigwedge_{i\in n\setminus d} \|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u)\| \wedge \bigwedge_{i\in d} \|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(\mathbf{i}) = a_{g(i)}\|\Big)
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt aufgrund des unendlichen Distributivgesetzes in $\mathcal{B}$ (die Bedingung $d \subseteq n \wedge g : d \to \omega$ statt einfach $g : n \to \omega$ dient dazu, um den einzelnen Summanden $\|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u)\|$ von den ω-vielen Summanden $\|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge u(\mathbf{i}) = a_j\|$ zu unterscheiden). Ich möchte nun die Summanden in der rechten Seite der letzten Gleichung mit $e_{d,g}$ bezeichnen. Also ist für jedes $d \subseteq n$ und $g : d \to \omega$ nun $e_{d,g} \leq \bigvee_{h\in W} \|h^{\#} = u\|$ zu zeigen. Dieses gilt bestimmt, wenn ich $e_{d,g} \leq \|g^{\#} = u\|$ beweise.

Es ist $\|g^{\#}$ ist eine Belegung$\| = \top$ wegen Lemma 8.4(i) gültig und damit natürlich auch $\|\mathrm{Fkt}(g^{\#})\| = \top$. Aus Absolutheitsgründen gilt $\|\mathbf{d} \subseteq \mathbf{n}\| = \top$, und mit Lemma 8.4(ii) folgt daraus $\|\mathrm{Vb}(g^{\#}) \subseteq \mathbf{n}\| = \top$. Schließlich berechnet man mit Lemma 8.4 noch $\|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(g^{\#})\| = \top$ für $i \in n \setminus d$ und $\|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(g^{\#}) \wedge g^{\#}(\mathbf{i}) = a_{g(i)}\| = \top$ für $i \in d$. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned}
e_{d,g} \;=\;& \|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \wedge \bigwedge_{i\in n\setminus d} \|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u)\|\,\|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(g^{\#})\| \\
& \wedge \bigwedge_{i\in d} \|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u)\|\,\|\mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(g^{\#})\|\,\|u(\mathbf{i}) = a_{g(i)}\|\,\|g^{\#}(\mathbf{i}) = a_{g(i)}\| \\
\leq\;& \|\mathrm{Fkt}(u)\|\,\|\mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n}\| \\
& \wedge \bigwedge_{i\in n} \|\mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(u) \wedge \mathbf{i} \notin \mathrm{Vb}(g^{\#}) \;\vee\; \mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(u) \wedge \mathbf{i} \in \mathrm{Vb}(g^{\#}) \wedge u(\mathbf{i}) = g^{\#}(\mathbf{i})\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\mathrm{Fkt}(u) \wedge \mathrm{Fkt}(g^{\#}) \wedge \mathrm{Vb}(u) \subseteq \mathbf{n} \wedge \mathrm{Vb}(g^{\#}) \subseteq \mathbf{n} \\
&\qquad \wedge (\forall i \in \mathbf{n})(i \notin \mathrm{Vb}(u) \wedge i \notin \mathrm{Vb}(g^{\#}) \vee i \in \mathrm{Vb}(u) \wedge i \in \mathrm{Vb}(g^{\#}) \wedge u(i) = g^{\#}(i))\| \\
&\leq \|u = g^{\#}\|
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, da die obere Aussage die untere Aussage $u = g^{\#}$ in ZF impliziert.

(ii) Gemäß (i) gilt

$$\begin{aligned}
\|u \text{ ist eine Belegung} \wedge u \supseteq k^{\#}\| &= \bigvee_{h \in W} \|u = h^{\#}\| \, \|u \supseteq k^{\#}\| \\
&= \bigvee_{h \in W} \|u = h^{\#}\| \, \|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| \\
&\geq \bigvee_{h \in W \wedge h \supseteq k} \|u = h^{\#}\| \, \|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| \\
&= \bigvee_{h \in W \wedge h \supseteq k} \|u = h^{\#}\| \, ,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund von Lemma 8.4(vi) gilt. Damit ist nur noch $\leq$ in (ii) zu zeigen. Ist ein $h \in W$ gegeben mit $\mathrm{Vb}(h) \not\supseteq \mathrm{Vb}(k)$, so folgt mit Lemma 8.2 sofort $\|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| = \perp$. Damit reicht es, wenn man für jedes $h \in W$ mit $\mathrm{Vb}(h) \supseteq \mathrm{Vb}(k)$ ein $l \in W$ mit $l \supseteq k$ und $\|u = h^{\#}\| \, \|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| \leq \|u = l^{\#}\|$ konstruiert. Sei also ein entsprechendes h gegeben. Man definiert ein $l : \mathrm{Vb}(h) \to \omega$ durch $l(i) = k(i)$ für jedes $i \in \mathrm{Vb}(k)$ und $l(i) = h(i)$ für jedes $i \in \mathrm{Vb}(h) \setminus \mathrm{Vb}(k)$. Man berechnet nun

$$\|h^{\#} = l^{\#}\| = \bigwedge_{i \in \mathrm{Vb}(k)} \|a_{h(i)} = a_{k(i)}\| = \|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| \, .$$

Damit folgt $\|u = h^{\#}\| \, \|h^{\#} \supseteq k^{\#}\| = \|u = h^{\#}\| \, \|h^{\#} = l^{\#}\| \leq \|u = l^{\#}\|$.

(iii) folgt mit Lemma 6.4(i) sofort aus (i). □

Der Nachweis der Gültigkeit von Axiom (vi) in $\mathcal{N}$ unterscheidet sich von der Methodik prinzipiell nicht vom Nachweis der Gültigkeit der Axiome (iii) und (iv). Auch in ihm werden diverse Absolutheitsaussagen zuerst bewiesen und dann benutzt. Aber der technische Aufwand ist doch um einiges größer als bei den den bisherigen Beweisen. Da dieser Beweis auch zum allgemeinen Verständnis des Gesamtbeweises der Konsistenz von SP meines Erachtens nichts wesentliches mehr beträgt, möchte ich hier auf ihn verzichten und nur eine ganz grobe Übersicht über seinen Aufbau geben.

Da es um den Nachweis geht, daß jedes Element von $\mathcal{N}$ einen Namen in $\mathcal{L}$ hat, liegt es nahe, die bei der Definition von Namen benutzten Terme und Funktionen, also z. B. die Sprache $\mathcal{L}$ und die Funktionen λ, `den` und `occ` auf Absolutheiten zu untersuchen. Genau dieses geschieht im Beweis der Gültigkeit von Axiom (vi). Es sind ja die Zeichen, Terme und Formeln von $\mathcal{L}$ (Klassen-)Terme von ZF, und es sind, wie ich bereits früher erwähnte, alle Zeichen, Terme und Formeln von $\mathcal{L}$ Elemente von S. Es verwundert nicht, daß es sich um absolute Terme von SP handelt. Man weist also zunächst die folgende Aussage nach:

Die folgenden Terme von ZF *sind absolut:*
(i) $\neg$, $\vee$, $\in$, $=$, x_i, a_i, $\mathbf{s}$, $\exists_\alpha$ *und* $\Diamond_\alpha$*. Dabei ist es egal, ob man z. B.* $\exists_\alpha$ *als bloßes Zeichen, also als den Term* $(1, \alpha)$*, oder als* 1*-Folge* $\{(0, (1, \alpha))\}$ *betrachtet.*
(ii) $s\hat{\ }t$.
(iii) ω.

Als nächstes weist man die Absolutheit der Funktion λ nach, es gilt also:

Der Term $\lambda(x)$ *ist absolut.*

Nun möchte man die Absolutheit von Aussagen wie $x \in TL$ oder $x \in FL$ nachweisen. Man beachte aber, daß die Aussage $x \in TL$ das Prädikatensymbol S benötigt, da man entscheiden können muß, ob z. B. ein Zeichen ein Konstantensymbol $\mathbf{s}$ für ein $s \in S$ ist. Aus diesem Grund muß man einen etwas modifizierten Absolutheitsbegriff benutzen, der atomare Formeln der Form $x = y$, $x \in y$ und nun auch $S(x)$ berücksichtigt. Wie bei den ersten atomaren Formeln soll die Relativierung der Formel $S(x)$ auf eine Klasse M nichts ändern, d. h. man definiert $S(x)^{(M)} \equiv S(x)$. Zu den Axiomen (M1)–(M3) wird dann noch das Axiom

$$\text{(M4)} \qquad \forall x(S(x) \Longrightarrow M(x))$$

zugefügt. Alle bisher hergeleiteten Absolutheitsergebnisse, insbesondere die Lemmata 7.3 und 7.4, bleiben auch unter diesem erweiterten Absolutheitsbegriff richtig. So kann man als nächstes folgendes beweisen:

(i) Sei T *die folgendermaßen definierte Funktion: Für* $x \in FL$ *sei* $T(x)$ *die Menge aller Indizes von freien Variablen von* x*, für* $x \in TL$ *sei* $T(x) = \{\{1\}\}$*, und sonst sei* $T(x) = \{\{2\}\}$*. Dann ist der Term* $T(x)$ *absolut.*
(ii) Die folgenden Formeln sind absolut: $x \in TL$*,* $x \in FL$ *und „*x *ist ein Satz von* $\mathcal{L}$*“.*

Schließlich beweist man, daß das Substituieren eine absolute Umformung ist. Die präzise Form dieser Aussage sieht wie folgt aus:

Sei $\mathtt{sbt}(\sigma, i, u)$ *die Funktion, die für jedes* $\sigma \in FL$*,* $i \in \omega$ *und* $u \in TL$ *die Formel ergibt, die durch Ersetzen aller freien Variablenvorkommen von* x_i *in* σ *durch* u *entsteht. In allen anderen Fällen sei der Funktionswert* $\emptyset$*. Dann ist* $\mathtt{sbt}(\sigma, i, u)$ *absolut.*

Man kann diese Absolutheitsergebnisse nicht nur in SP, sondern auch in ZF benutzen. In ZF gibt es zwar kein Prädikatensymbol S, aber man kann dort, wenn in ZF Absolutheitsergebnisse mit S betrachten will, $S(x)$ einfach als $x = x$ interpretieren, d. h. S ist in ZF die Klasse V aller Mengen. Dieses habe ich ja bereits am Anfang von Kapitel 5 erwähnt. Wenn aber die Absolutheitsaussagen in $\mathcal{N}$ benutzt werden sollen, so steht natürlich ein Prädikatensymbol S zur Verfügung. In diesem Fall soll man die Prädikate $M(x)$ und $S(x)$, die in den Absolutheitsbewiesen vorkamen, durch das in $\mathcal{N}$ zur Verfügung stehende Prädikat $S(x)$ ersetzen.

Als nächstes werden nun folgende Absolutheitsaussagen bewiesen:

Die Terme $\mathtt{occ}(x)$ *und* $\mathtt{sub}(x, s)$ *sind absolut.*

Es sind nun genug Voraussetzungen geschaffen, um eine Aussage zu beweisen, die schon fast Axiom (vi) darstellt. Der Beweis allerdings wird per Induktion über die Definition von $\|\ \|$ geführt und benötigt eine neunfache Fallunterscheidung. Er ist damit im Gesamtbeweis der Gültigkeit von Axiom (vi) der mit Abstand längste Teilbeweis. Die Aussage lautet:

Sei t_n der Term $\{(\mathbf{0}, a_0)^*, (\mathbf{1}, a_1)^*, \ldots, (\mathbf{m}, a_m)^*\}^*$ mit $m = n-1$. Dann folgt: Ist u ein Term mit $\mathtt{occ}(u) \subseteq n$, so gilt $\|\mathtt{den}(\mathbf{u}, t_n) = u\| = \top$. Ist ϕ ein Satz von $\mathcal{L}$ mit $\mathtt{occ}(\phi) \subseteq n$, so gilt $\|\mathtt{den}(\boldsymbol{\phi}, t_n) = \top\| = \|\phi\|$.

Mit diesen Voraussetzungen kann man nun schnell beweisen:

Axiom (vi) ist in $\mathcal{N}$ gültig.

Die Gültigkeit der Axiome (i), (iii), (iv) und (vi) in $\mathcal{N}$ wurde unabhängig von der Wahl der Booleschen Algebra $\mathcal{B}$ nachgewiesen. Um aber nun die Axiome (ii) und (v) in $\mathcal{N}$ zu beweisen, ist die Wahl einer bestimmten Booleschen Algebra nötig. Dieses ist auch nicht weiter verwunderlich, da diese Axiome stark auf die Mengen a_i und b zurückgreifen.

Definition 8.6 Betrachte die Menge $2^{\omega\times\omega}$ aller Funktionen $f : \omega \times \omega \to 2 = \{0, 1\}$, und es sei $P = \{p \mid p \subset\subset f \text{ für ein } f \in 2^{\omega\times\omega}\}$. Die endlichen Funktionen $p \in P$ werden Bedingungen genannt. Für jedes $p \in P$ setzt man $\mathfrak{b}_p = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f \supseteq p\}$ (diese $\mathfrak{b}_p$ sollten nicht mit den Intervallbezeichnern b_q verwechselt werden). Die Mengen $\mathfrak{b}_p$ werden Elemente der noch zu definierenden Booleschen Algebra sein und sind als solche ebenso wie die Elemente $\mathfrak{a}_{i,n}$ auch durch die Wahl ihrer Schrift gekennzeichnet. Man versieht nun $2^{\omega\times\omega}$ mit einer Topologie, indem man $2^{\omega\times\omega}$ als das $\omega \times \omega$-fache Produkt des zweipunktigen, diskreten Raumes 2 auffaßt. Damit ist die Menge $\{\mathfrak{b}_p \mid p \in P\}$ gerade eine Basis dieser Topologie auf $2^{\omega\times\omega}$. Für verträgliche Bedingungen p, q gilt offensichtlich $\mathfrak{b}_p \cap \mathfrak{b}_q = \mathfrak{b}_{p\cup q}$. Wegen $2^{\omega\times\omega} \setminus \mathfrak{b}_p = \bigcup\{\mathfrak{b}_q \mid q = \{((i,n), 1-p((i,n)))\} \text{ für ein } (i,n) \in \mathrm{Vb}(p)\}$ ist weiterhin jedes $\mathfrak{b}_p$ auch abgeschlossen. Es wird nun die vollständige Boolesche Algebra $\mathcal{B}$ als die Menge aller regulär offenen Mengen dieses topologischen Raumes definiert (d. h. B ist die Menge aller offenen Mengen, die der Kern ihres topologischen Abschlusses sind). Man beachte, daß für beliebige Elemente $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ der Booleschen Algebra nun $\mathfrak{c} \le \mathfrak{d} \iff \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{d}$, $\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{d} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{d}$, $\perp = \emptyset$ und $\top = 2^{\omega\times\omega}$ gelten, aber die Booleschen Komplement- und Supremumsoperationen *nicht* die mengentheoretischen Komplement- und Vereinigungsoperationen sind. Da jedes $\mathfrak{b}_p$ offen und abgeschlossen ist, ist es nun auch ein Element von B. Man kann nun die Elemente $\mathfrak{a}_{i,n}$ definieren: $\mathfrak{a}_{i,n} = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f(i,n) = 1\}$. Es gilt offensichtlich $\mathfrak{a}_{i,n} = \mathfrak{b}_p$ für $p = \{((i,n), 1)\}$, somit folgt $\mathfrak{a}_{i,n} \in B$.

Es wird nun das Erzwingen (englisch „forcing“) von SP-Formeln Φ definiert. Seien $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ die freien Variablen von Φ und es seien $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ Terme. Dann setzt man

$$p \Vdash \Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{u_1}) \iff \mathfrak{b}_p \le \|\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n})\|$$

($p \Vdash \Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{u_1})$ wird „p erzwingt $\Phi(u_{i_1}, \ldots, u_{u_1})$“ gelesen).

Ich habe bereits früher erwähnt, daß die Elemente a_i in einem gewissen Sinn nicht unterscheidbar sind. Diesen Ansatz will ich nun präzisieren, indem ich die a_i's permutiere und untersuche, wie sich das auf die Bewertung von Formeln auswirkt. Die Permutationen der a_i's werden von Permutationen von ω indiziert, die dann auf kanonische Art und Weise auch Permutationen auf $2^{\omega\times\omega}$ schließlich Automorphismen auf $\mathcal{B}$ indizieren. Dieses wird in der nächsten Definition deutlich.

Definition 8.7 Sei σ eine Permutation von ω. Für $f \in 2^{\omega\times\omega}$ definiert man nun $\sigma(f)$ durch $\sigma(f)(\sigma(i), n) = f(i, n)$. Ist U eine Teilmenge von $2^{\omega\times\omega}$, so sei dann weiterhin $\sigma(U) = \{\sigma(f) \mid f \in U\} = \sigma[U]$. Für eine Bedingung p sei schließlich

$$\sigma(p) = \{((\sigma(i), n), l) \mid ((i, n), l) \in p\} .$$

Es werden so offensichtlich bijektive Abbildungen auf P, auf $2^{\omega\times\omega}$ und auf $\mathfrak{P}(2^{\omega\times\omega})$ definiert, deren inverse Abbildungen die von σ^{-1} induzierten Abbildungen sind. Für $f \in 2^{\omega\times\omega}$ und $p \in P$ gilt weiterhin $f \supseteq p \Longleftrightarrow \sigma(f) \supseteq \sigma(p)$. Daraus folgt

$$\sigma(\mathfrak{b}_p) = \{\sigma(f) \mid f \supseteq p\} = \{\sigma(f) \mid \sigma(f) \supseteq \sigma(p)\} = \{f' \mid f' \supseteq \sigma(p)\} = \mathfrak{b}_{\sigma(p)} .$$

Sei nun U eine offene Menge des topologischen Raumes $2^{\omega\times\omega}$, d. h. es existiert ein $P' \subseteq P$ mit $U = \bigcup\{\mathfrak{b}_p \mid p \in P'\}$. Damit folgt wie eben

$$\begin{aligned} \sigma(U) &= \{\sigma(f) \mid f \supseteq p \text{ für ein } p \in P'\} \\ &= \{\sigma(f) \mid \sigma(f) \supseteq \sigma(p) \text{ für ein } p \in P'\} \\ &= \bigcup\{\mathfrak{b}_{\sigma(p)} \mid p \in P'\} . \end{aligned}$$

Damit ist σ auf dem topologischen Raum $2^{\omega\times\omega}$ eine bijektive und offene Abbildung. Da das auch auf deren Inversen σ^{-1} zutrifft, ist σ damit ein Homöomorphismus. Folglich ist $\sigma|B$ ein Boolescher Automorphismus.

Für die Mengen $\mathfrak{a}_{i,n}$ gilt schließlich $\sigma(\mathfrak{a}_{i,n}) = \mathfrak{a}_{\sigma(i),n}$. Somit kann σ kanonisch auf $TL \cup FL$ fortgesetzt werden, indem man in jedem Ausdruck der Sprache $\mathcal{L}$ jedes $\mathfrak{a}_i$ durch $\mathfrak{a}_{\sigma(i)}$ ersetzt.

Lemma 8.8 *(i) Für jeden Satz ϕ von $\mathcal{L}$ gilt $\|\sigma(\phi)\| = \sigma(\|\phi\|)$.*

(ii) Für jede SP*-Formel Ψ gilt $\|\Psi(\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_n))\| = \sigma(\|\Psi(v_1, \ldots, v_n)\|)$.*

Beweis: (i) Ich möchte zunächst anmerken, daß offensichtlich $\lambda(u) = \lambda(\sigma(u))$ für jeden Term u gilt. Der Beweis wird nun per Induktion über den Aufbau von ϕ geführt, wie er in der Definition von $\| \ \|$ (siehe Definition 5.1) benutzt wurde. Ich beginne mit den atomaren Formeln der Form $u_i \in u_j$. Ich möchte nur den schwierigsten Fall beweisen, wo u_j ein Aussonderungsterm ist. Die anderen Fälle werden analog gehandhabt.

Sei also $\phi \equiv u \in \Diamond_\alpha x\psi(x)$. Dann folgt:

$$\sigma(\|u \in \Diamond_\alpha x\psi(x)\|) \overset{\text{Def.} \| \ \|}{=} \sigma(\bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|u = v\| \, \|\psi(v)\|)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \sigma(\|u=v\|)\sigma(\|\psi(v)\|)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|\sigma(u)=\sigma(v)\|\,\|\sigma(\psi(v))\|\\
&\overset{\text{Def. }\sigma}{=} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|\sigma(u)=\sigma(v)\|\,\|\sigma(\psi)(\sigma(v))\|\\
&\overset{\sigma\text{ bij.}}{=} \bigvee_{\lambda(v')<\alpha} \|\sigma(u)=v'\|\,\|\sigma(\psi)(v')\|\\
&\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \|\sigma(u)\in \Diamond_\alpha x\sigma(\psi)(x)\|\\
&\overset{\text{Def. }\sigma}{=} \|\sigma(\phi)\|
\end{aligned}
$$

Sei nun $\phi \equiv u = v$ und $\gamma = \max\{\lambda(u), \lambda(v)\}$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\|u=v\|) &\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \sigma(\bigwedge_{\lambda(x)<\gamma} \|x\in u \Longleftrightarrow x\in v\|)\\
&\overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} \bigwedge_{\lambda(x)<\gamma} \sigma(\|x\in u \Longleftrightarrow x\in v\|)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \bigwedge_{\lambda(x)<\gamma} \|\sigma(x)\in\sigma(u) \Longleftrightarrow \sigma(x)\in\sigma(v)\|\\
&\overset{\sigma\text{ bij.}}{=} \bigwedge_{\lambda(x')<\gamma} \|x'\in\sigma(u) \Longleftrightarrow x'\in\sigma(v)\|\\
&\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \|\sigma(u)=\sigma(v)\|
\end{aligned}
$$

Sei $\phi \equiv \neg\psi$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\|\neg\psi\|) &= \sigma(\|\psi\|^\perp) \overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} (\sigma(\|\psi\|))^\perp\\
&\overset{\text{IV}}{=} \|\sigma(\psi)\|^\perp \overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \|\neg\sigma(\psi)\|\\
&= \|\sigma(\neg\psi)\|
\end{aligned}
$$

Der Fall $\phi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$ wird analog behandelt.

Sei $\phi \equiv \exists_\alpha x\psi(x)$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sigma(\|\exists_\alpha x\psi(x)\|) &\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \sigma(\bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|\psi(v)\|)\\
&\overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \sigma(\|\psi(v)\|)\\
&\overset{\text{IV}}{=} \bigvee_{\lambda(v)<\alpha} \|\sigma(\psi)(\sigma(v))\|\\
&\overset{\sigma\text{ bij.}}{=} \bigvee_{\lambda(v')<\alpha} \|\sigma(\psi)(v')\|\\
&\overset{\text{Def. }\|\ \|}{=} \|\exists_\alpha x\sigma(\psi)(x)\|\\
&\overset{\text{Def. }\sigma}{=} \|\sigma(\exists_\alpha x\psi(x))\|
\end{aligned}
$$

(ii) Der Beweis wird per Induktion über den Aufbau von Ψ geführt.

Gilt $\Psi \equiv x_i \in x_j$ oder $\Psi \equiv x_i = x_j$, so folgt die Aussage von (ii) sofort aus (i).

Sei $\Psi \equiv S(x)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(\|S(u)\|) &\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \sigma(\bigvee_{s\in S}\|u=\mathbf{s}\|) \\
&\overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} \bigvee_{s\in S}\sigma(\|u=\mathbf{s}\|) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \bigvee_{s\in S}\|\sigma(u)=\mathbf{s}\|) \\
&\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \|S(\sigma(u))\|
\end{aligned}$$

Der Fall $\Psi \equiv F(x)$ wird analog behandelt.

Für $\Psi \equiv \neg\Phi$ oder $\Psi \equiv \Phi_1 \vee \Phi_2$ wird der Beweis genau wie in (i) geführt.

Sei $\Psi \equiv \exists x\Phi(x)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(\|\exists x\Phi(x,u_1,\ldots,u_n)\|) &\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \sigma(\bigvee_{u\in TL}\|\Phi(u,u_1,\ldots,u_n)\|) \\
&\overset{\sigma\text{ Autom.}}{=} \bigvee_{u\in TL}\sigma(\|\Phi(u,u_1,\ldots,u_n)\|) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \bigvee_{u\in TL}\|\Phi(\sigma(u),\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n))\| \\
&\overset{\sigma\text{ bij.}}{=} \bigvee_{u'\in TL}\|\Phi(u',\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n))\| \\
&\overset{\text{Def.}\,\|\ \|}{=} \|(\exists x\Phi(x))(\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n))\| \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 8.9 *Es gelte $p \Vdash \Phi(u_1,\ldots,u_n)$ für eine Bedingung p und es sei p' die Einschränkung von p auf alle Paare (i,m), so daß a_i in einen der Terme $u_1,\ldots,u_n$ auftritt. Dann gilt auch $p' \Vdash \Phi(u_1,\ldots,u_n)$.*

Beweis: Für jede Bedingung q setzt man $\mathrm{Vb}^*(q) = \{i \mid \exists m\ (i,m) \in \mathrm{Vb}(q)\}$. Gilt nun $\mathrm{Vb}^*(p) = \mathrm{Vb}^*(p')$, so folgt $p = p'$, und das Lemma gilt trivialerweise. Sei also $\mathrm{Vb}^*(p) \setminus \mathrm{Vb}^*(p') = \{i_1,\ldots,i_l\}$. Weiterhin sei ein m mit $m \supseteq \mathrm{Vb}^*(p)$ gewählt. Zu jeder Zahl $k \geq m$ existiert offensichtlich eine Permutation σ_k, die auf $\bigcup_{1\leq i\leq n}\mathsf{occ}(u_i)$ die Identität ist und die $i_1,\ldots,i_l$ auf Zahlen $\geq k$ abbildet. Gemäß Voraussetzung gilt $\mathfrak{b}_p \leq \|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\|$, also auch $\sigma_k(\mathfrak{b}_p) \leq \sigma_k(\|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\|)$. Mit Lemma 8.8 folgt nun

$$\mathfrak{b}_{\sigma_k(p)} = \sigma_k(\mathfrak{b}_p) \leq \sigma_k(\|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\|) = \|\Phi(\sigma_k(u_1),\ldots,\sigma_k(u_n))\| = \|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\|\,.$$

Man setzt jetzt $\mathfrak{c} = \|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\|$, und damit ist nun $\mathfrak{b}_{p'} \leq \mathfrak{c}$ zu zeigen. Angenommen, das trifft nicht zu. Damit gilt $\mathfrak{b}_{p'} \wedge \mathfrak{c}^\perp \neq \perp$, womit also ein q mit $\mathfrak{b}_q \subseteq \mathfrak{b}_{p'} \wedge \mathfrak{c}^\perp$ existiert (denn es ist $\{\mathfrak{b}_q \mid q \in P\}$ ein $\bigvee$-Erzeuger von $\mathcal{B}$). Es folgt damit $q \supseteq p'$ und $\mathfrak{b}_q \cap \mathfrak{c} = \emptyset$. Man wähle nun eine natürliche Zahl k mit $k \supseteq \mathrm{Vb}^*(q)$. Dann ist $q' = \sigma_k(p) \cup q$ offensichtlich eine Bedingung. Damit folgt einerseits $\mathfrak{b}_{q'} \subseteq \mathfrak{b}_{\sigma_k(p)} \subseteq \|\Phi(u_1,\ldots,u_n)\| = \mathfrak{c}$, andererseits aber $\mathfrak{b}_{q'} \subseteq \mathfrak{b}_q$, $\mathfrak{b}_q \cap \mathfrak{c} = \emptyset$, also $\mathfrak{b}_{q'} \cap \mathfrak{c} = \emptyset$. Wegen $\mathfrak{b}_{q'} \neq \emptyset$ ist das ein Widerspruch. $\square$

Lemma 8.10 *(i) Für jedes $i \in \omega$ ist $a_i \subseteq \omega \wedge a_i \in b$ in $\mathcal{N}$ gültig.*

(ii) $(\forall x \in b)(x \subseteq \omega)$ ist in $\mathcal{N}$ gültig.

Beweis: (i) Für jeden Term u gilt

$$\|u \in a_i\| \overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \bigvee_{n\in\omega} \|u = \mathbf{n}\| \mathfrak{a}_{i,n} \leq \bigvee_{n\in\omega} \|u = \mathbf{n}\| \overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \|u \in \boldsymbol{\omega}\| \,.$$

Da in $\mathcal{N}$ auch $\omega = \boldsymbol{\omega}$ gilt, folgt

$$\|\forall x(x \in a_i \Longrightarrow x \in \omega)\| = \|\forall x(x \in a_i \Longrightarrow x \in \boldsymbol{\omega})\| \overset{\text{Def.} \|\ \|}{=} \bigwedge_{u\in TL} \|u \in a_i \Longrightarrow u \in \boldsymbol{\omega}\| = \top$$

Die Gültigkeit von $a_i \in b$ folgt sofort aus der Definition von $\|\ \|$.
(ii) Mit Teil (i) und der Definition von $\|\ \|$ gilt

$$\|u \in b\| = \bigvee_{i\in\omega} \|u = a_i\|\, \|a_i \subseteq \omega\| \leq \bigvee_{i\in\omega} \|u \subseteq \omega\| = \|u \subseteq \omega\| \,.$$

Damit folgt

$$\|(\forall x \in b)(x \subseteq \omega)\| = \|\forall x(x \in b \Longrightarrow x \subseteq \omega)\| = \bigwedge_{u\in TL} \|u \in b \Longrightarrow u \subseteq \omega\| = \top \,. \qquad \Box$$

Lemma 8.11 *Für jeden Intervallbezeichner q gilt*

$$\|a_i \in b_{\mathbf{q}}\| = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, (\forall n \in \mathrm{Vb}(q))\ (f(i,n) = q(n))\} \,.$$

(Man beachte, daß der Index von $b_{\mathbf{q}}$ ein Konstantensymbol ist, so daß $b_{\mathbf{q}}$ im Gegensatz zu b_q ein Term der Sprache $\mathcal{L}$ ist.)

Beweis: Da in $\mathcal{N}$ bereits $a_i \in b$ gilt, ist aufgrund der Definition von b_q nun $a_i \in b_{\mathbf{q}}$ in $\mathcal{N}$ äquivalent zu $(\forall n \in \mathrm{Vb}(\mathbf{q}))\ (n \in a_i \Longleftrightarrow \mathbf{q}(n) = 1)$. Sei $\mathrm{Vb}(q) = d$, dann ist $\mathrm{Vb}(\mathbf{q}) = \mathbf{d}$ in $\mathcal{N}$ aus Absolutheitsgründen (Lemmata 7.3, 7.4 und 7.7) gültig. Mit Lemma 6.4(iv) folgt nun

$$\|a_i \in b_{\mathbf{q}}\| = \|(\forall n \in \mathbf{d})\,(n \in a_i \Longleftrightarrow \mathbf{q}(n) = 1)\| = \bigwedge_{n\in d} \|\mathbf{n} \in a_i \Longleftrightarrow \mathbf{q}(\mathbf{n}) = 1\| \,.$$

Wiederum mit Absolutheitsargumenten gilt $\|\mathbf{q}(\mathbf{n}) = 1\| = \top$, falls $q(n) = 1$ gilt, und $\|\mathbf{q}(\mathbf{n}) = 1\| = \bot$, falls $q(n) = 0$ gilt. Aufgrund der Definition von $\|\ \|$ gilt weiterhin $\|\mathbf{n} \in a_i\| = \mathfrak{a}_{i,n}$. Setzt man $\mathfrak{c}^{(0)} = \mathfrak{c}^{\perp}$ und $\mathfrak{c}^{(1)} = \mathfrak{c}$ für jedes $\mathfrak{c} \in B$, so folgt damit nun

$$\|a_i \in b_{\mathbf{q}}\| = \bigwedge_{n\in d} \mathfrak{a}_{i,n}^{q(n)}$$

Mit $\mathfrak{a}_{i,n} = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, f(i,n) = 1\}$ folgt $\mathfrak{a}_{i,n}^{\perp} = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, f(i,n) = 0\}$. Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} \|a_i \in b_{\mathbf{q}}\| &= \bigcap_{n\in d} \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, f(i,n) = q(n)\} \\ &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, (\forall n \in \mathrm{Vb}(q))\ (f(i,n) = q(n))\} \,. \end{aligned} \qquad \Box$$

Lemma 8.12 *Für jeden Intervallbezeichner q ist $b_{\mathbf{q}} \neq \emptyset$ in $\mathcal{N}$ gültig.*

Beweis: Ich möchte zeigen, daß $(\exists x \in b)(x \in b_q)$ in $\mathcal{N}$ gültig ist. Gemäß Lemma 6.4(ii) gilt $\|(\exists x \in b)(x \in b_q)\| = \bigvee_{i\in\omega} \|a_i \in b_{\mathbf{q}}\|$. Für jedes $i \in \omega$ setzt man jetzt $\mathfrak{c}_i = \|a_i \in b_{\mathbf{q}}\| = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, (\forall n \in \mathrm{Vb}(q))\ (f(i,n) = q(n))\}$, womit nun $\bigvee_{i\in\omega} \mathfrak{c}_i = \top$ zu zeigen ist. Angenommen, das ist falsch. Dann existiert eine Bedingung $p \in P$ mit $\mathfrak{b}_p \leq (\bigvee_{i\in\omega} \mathfrak{c}_i)^\perp = \bigwedge_{i\in\omega} \mathfrak{c}_i^\perp$. Es sei nun ein i mit $i \notin \mathrm{Vb}^*(p) = \{i \,|\, \exists n((i,n) \in \mathrm{Vb}(p))\}$ gewählt. Offensichtlich folgt $\mathfrak{b}_p \cap \mathfrak{c}_i \neq \emptyset$, also $\mathfrak{b}_p \not\leq \mathfrak{c}_i^\perp$ und damit ein Widerspruch. □

Satz 8.13 *In $\mathcal{N}$ gilt Axiom (ii) von* SP.

Beweis: Gemäß Lemma 8.10(ii) ist $b \subseteq \mathfrak{P}(\omega)$ in $\mathcal{N}$ gültig. Es ist also nur noch zu zeigen, daß in $\mathcal{N}$ jedes absolute Intervall nichtleer ist. Da bereits die Gültigkeit von Axiom (iii) in $\mathcal{N}$ nachgewiesen ist, ist in $\mathcal{N}$ jeder Intervallbezeichner ein Element von S. Damit folgt mit Lemma 6.4(iii) nun

$$\begin{aligned}
&\|\forall q(q \text{ ist Intervallbezeichner} \Longrightarrow b_q \neq \emptyset)\| \\
&\quad = \|(\forall q \in S)(q \text{ ist Intervallbezeichner} \Longrightarrow b_q \neq \emptyset)\| \\
&\quad = \bigwedge_{q\in S} \|(\mathbf{q} \text{ ist Intervallbezeichner} \Longrightarrow b_{\mathbf{q}} \neq \emptyset)\| \,.
\end{aligned}$$

Aus Absolutheitsgründen ist $\|\mathbf{q}$ ist Intervallbezeichner$\|$ gleich $\top$ oder $\perp$, je nachdem, ob q ein Intervallbezeichner ist oder nicht. Damit folgt mit Lemma 8.12

$$\begin{aligned}
&\|(\forall q \in S)(q \text{ ist Intervallbezeichner} \Longrightarrow b_{\mathbf{q}} \neq \emptyset)\| \\
&\quad = \bigwedge\{\|b_{\mathbf{q}} \neq \emptyset\| \,|\, q \text{ ist Intervallbezeichner}\} \\
&\quad = \top \,.
\end{aligned}$$

□

Satz 8.14 *Das Axiomenschema (v) der Fortsetzbarkeit ist in $\mathcal{N}$ gültig.*

Beweis: Sei Φ eine Formel aus SP. Die entsprechende Ausprägung von Axiom (v) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&(\forall x_1, \ldots, \forall x_n \in S \cup \{b\})(\forall m \in \omega)\forall y \\
&\Big(y \text{ ist eine Belegung} \wedge y \text{ ist injektiv} \wedge \mathrm{Vb}(y) = m \wedge \Phi(x_1, \ldots, x_n, y) \Longrightarrow \\
&\exists q(q \text{ ist eine Funktion } \wedge \mathrm{Vb}(q) = m \\
&\quad \wedge(\forall i, j \in m)(q(i) \text{ ist Intervallbezeichner} \wedge y(i) \in b_{q(i)} \wedge (i \neq j \Rightarrow b_{q(i)} \cap b_{q(j)} = \emptyset)) \\
&\quad \wedge \forall z(z \text{ ist eine Belegung} \wedge z \text{ ist injektiv} \\
&\quad\quad \wedge \mathrm{Vb}(z) = m \wedge (\forall i \in m)(z(i) \in b_{q(i)}) \Rightarrow \Phi(x_1, \ldots, x_n, z)))\Big) \,.
\end{aligned}$$

Um die Gültigkeit dieser Formel in $\mathcal{N}$ nachzuweisen, werde ich sie nach und nach vereinfachen. Zuerst möchte ich die Allquantoren am Beginn eleminieren. Es gilt natürlich

$\|u \in S \cup \{b\}\| = \bigvee_{s \in S} \|u = \mathbf{s}\| \vee \|u = b\|$, somit kann ich auf die ersten Quantoren Lemma 6.4(ii) anwenden. Auf den nächsten Quantor kann ich Lemma 6.4(iv) anwenden, da $\omega = \boldsymbol{\omega}$ in $\mathcal{N}$ gilt. Den letzten Quantor schließlich beseitige ich mit Lemma 8.5(iii). Um die Gültigkeit der obigen Formel nachzuweisen, muß ich für $u_1, \ldots, u_n \in S \cup \{b\}$, $m \in \omega$ und $h \in W$ nun

$$\begin{aligned} &\|h^\# \text{ ist injektiv} \wedge \mathrm{Vb}(h^\#) = \mathbf{m} \wedge \Phi(u_1, \ldots, u_n, h^\#)\| \ \leq \\ &\|\exists q(q \text{ ist eine Funktion } \wedge \mathrm{Vb}(q) = \mathbf{m} \\ &\quad \wedge (\forall i, j \in \mathbf{m})(q(i) \text{ ist Intervallbezeichner} \wedge h^\#(i) \in b_{q(i)} \wedge (i \neq j \Rightarrow b_{q(i)} \cap b_{q(j)} = \emptyset)) \\ &\quad \wedge \forall z(z \text{ ist eine Belegung} \wedge z \text{ ist injektiv} \\ &\quad\ \wedge \mathrm{Vb}(z) = \mathbf{m} \wedge (\forall i \in \mathbf{m})(z(i) \in b_{q(i)}) \Rightarrow \Phi(u_1, \ldots, u_n, z)))\| \end{aligned} \tag{8.1}$$

zeigen. Ich bezeichne die rechte Seite dieser Ungleichung mit $\mathfrak{e}$. Zuerst möchte ich die linke Seite der Ungleichung vereinfachen. Ist h eine nicht injektive Belegung, d. h. es existieren $i \neq j$ mit $h(i) = h(j)$, so folgt $\|a_{h(i)} \neq a_{h(j)}\| = \perp$, und daraus kann man mit Lemma 8.4(iii) nun $\|h^\# \text{ ist injektiv}\| = \perp$ berechnen. Für $m \neq \mathrm{Vb}(h)$ leitet man aus Lemma 8.4(ii) weiterhin $\|\mathrm{Vb}(h^\#)\| = \perp$ her. Zum Nachweis von (8.1) reicht es also, für injektive Belegungen h mit $\mathrm{Vb}(h) = m$ nun

$$\|\Phi(u_1, \ldots, u_n, h^\#)\| \leq \mathfrak{e}$$

zu zeigen. Angenommen, das ist nicht so. Dann gilt $\|\Phi(u_1, \ldots, u_n, h^\#)\| \wedge \mathfrak{e}^\perp \neq \perp$, damit existiert ein $\mathfrak{b}_{p'} \leq \|\Phi(u_1, \ldots, u_n, h^\#)\| \wedge \mathfrak{e}^\perp$. Ich erweitere p' zu einer Bedingung p, so daß folgendes gilt: Aus $(i, j) \in \mathrm{Vb}(p)$ und $j' < j$ folgt auch $(i, j') \in \mathrm{Vb}(p)$, und für $i, k < m$ mit $i \neq k$ existiert ein j mit $(h(i), j), (h(k), j) \in \mathrm{Vb}(p)$ und $p(h(i), j) \neq p(h(k), j)$. Definiert man nun Funktionen $q_0, \ldots, q_{m-1}$ durch $q_i(j) = p(h(i), j)$, so sind aufgrund der Eigenschaften von p diese q_i's nun paarweise unverträgliche Intervallbezeichner. Es sei q das m-Tupel dieser Intervallbezeichner, d. h. es gilt $q(i) = q_i$ für jedes $i < m$. Aus $p \supseteq p'$ folgt offensichtlich $\mathfrak{b}_p \leq \mathfrak{b}_{p'} \leq \|\Phi(u_1, \ldots, u_n, h^\#)\| \wedge \mathfrak{e}^\perp$. Ich möchte nun einen Widerspruch herleiten, indem ich $\mathfrak{b}_p \leq \mathfrak{e}$ beweise. Um das zu tun, reicht es nun,

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_p \ \leq \ &\|\mathbf{q} \text{ ist eine Funktion } \wedge \mathrm{Vb}(\mathbf{q}) = \mathbf{m} \\ &\wedge (\forall i, j \in \mathbf{m})(\mathbf{q}(i) \text{ ist Intervallbezeichner} \wedge h^\#(i) \in b_{\mathbf{q}(i)} \\ &\quad \wedge (i \neq j \Rightarrow b_{\mathbf{q}(i)} \cap b_{\mathbf{q}(j)} = \emptyset)) \\ &\wedge \forall z(z \text{ ist eine Belegung} \wedge z \text{ ist injektiv} \\ &\quad \wedge \mathrm{Vb}(z) = \mathbf{m} \wedge (\forall i \in \mathbf{m})(z(i) \in b_{\mathbf{q}(i)}) \Rightarrow \Phi(u_1, \ldots, u_n, z))\| \end{aligned} \tag{8.2}$$

zu zeigen. Für den Beginn der in (8.2) bewerteten Formel gilt aus Absolutheitsgründen $\|\mathbf{q} \text{ ist eine Funktion } \wedge \mathrm{Vb}(\mathbf{q}) = \mathbf{m}\| = \top$. Um den nächsten Teil der Formel zu betrachten, setze ich

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \ = \ &\|(\forall i, j \in \mathbf{m})(\mathbf{q}(i) \text{ ist Intervallbezeichner} \wedge h^\#(i) \in b_{\mathbf{q}(i)} \\ &\wedge (i \neq j \Rightarrow b_{\mathbf{q}(i)} \cap b_{\mathbf{q}(j)} = \emptyset))\| \end{aligned}$$

und zeige $\mathfrak{b}_p \leq \mathfrak{d}$. Mit Lemma 6.4(iv) folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} \;=\; \bigwedge_{i,j\in m} &\|\mathbf{q}(\mathbf{i}) \text{ ist Intervallbezeichner} \wedge h^{\#}(\mathbf{i}) \in b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})} \\ &\wedge (\mathbf{i} \neq \mathbf{j} \Rightarrow b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})} \cap b_{\mathbf{q}(\mathbf{j})} = \emptyset)\| \,. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Aus Absolutheitsgründen gilt $\|\mathbf{q}(\mathbf{i})$ ist Intervallbezeichner$\| = \top$ für jedes $i < m$. Ich möchte nun

$$\|(\mathbf{i} \neq \mathbf{j} \Rightarrow b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})} \cap b_{\mathbf{q}(\mathbf{j})} = \emptyset)\| = \top \tag{8.4}$$

zeigen. Für $i = j$ ist das offensichtlich richtig, seien also $i, j \in m$ mit $i \neq j$. Dann sind $q(i)$ und $q(j)$ unverträglich, womit aus Absolutheitsgründen auch in $\mathcal{N}$ „$q(i)$ und $q(j)$ sind unverträglich“ gilt. In $\mathcal{N}$ gilt aber auch „sind r und s unverträgliche Intervallbezeichner, so folgt $b_r \cap b_s = \emptyset$“, somit ist $b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})} \cap b_{\mathbf{q}(\mathbf{j})} = \emptyset$ in $\mathcal{N}$ gültig. Also gilt (8.4).

Zum Nachweis von $\mathfrak{b}_p \leq \mathfrak{d}$ muß ich also nur noch $\mathfrak{b}_p \leq \|h^{\#}(\mathbf{i}) \in b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})}\|$ für jedes $i < m$ zu zeigen. Mit den Lemmata 8.4(iii) und 8.11 gilt

$$\begin{aligned}\|h^{\#}(\mathbf{i}) \in \mathfrak{b}_{\mathbf{q}(\mathbf{i})}\| &= \|a_{h(\mathbf{i})} \in b_{\mathbf{q}(\mathbf{i})}\| \\ &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid (\forall n \in \mathrm{Vb}(q(i)))\,(f(h(i), n) = q(i)(n))\}\,.\end{aligned}$$

Mit (8.3) und der Definition von q folgt nun

$$\begin{aligned}\mathfrak{d} &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid (\forall i \in m)(\forall n \in \mathrm{Vb}(q(i)))\,(f(h(i), n) = q(i)(n))\} \\ &= \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid (\forall i \in m)\forall n((h(i), n) \in \mathrm{Vb}(p) \Longrightarrow f(h(i), n) = p(h(i), n))\} \\ &\supseteq \{f \in 2^{\omega\times\omega} \mid f \supseteq p\} \\ &= \mathfrak{b}_p\,.\end{aligned}$$

Um also (8.2) zu beweisen, muß ich nur noch

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_p \;\leq\; &\|\forall z(z \text{ ist eine Belegung} \wedge z \text{ ist injektiv} \\ &\wedge \mathrm{Vb}(z) = \mathbf{m} \wedge (\forall i \in \mathbf{m})(z(i) \in b_{\mathbf{q}(i)}) \Rightarrow \Phi(u_1, \ldots, u_n, z))\|\end{aligned}$$

zeigen. Ähnlich wie nach (8.1) sieht man, daß es reicht, für jedes injektive $k \in W$ mit $\mathrm{Vb}(k) = m$ nun

$$\mathfrak{b}_p \leq \|(\forall i \in \mathbf{m})(k^{\#}(i) \in b_{\mathbf{q}(i)}) \Rightarrow \Phi(u_1, \ldots, u_n, k^{\#})\|$$

zeigt. Ich beweise die äquivalente Aussage

$$\mathfrak{b}_p \wedge \|(\forall i \in \mathbf{m})(k^{\#}(i) \in b_{\mathbf{q}(i)})\| \leq \|\Phi(u_1, \ldots, u_n, k^{\#})\|\,. \tag{8.5}$$

Aufgrund der Definition von q und mit den Lemmata 6.4(iv), 8.4(c) und 8.11 gilt

$$\begin{aligned}
&\|(\forall i \in \mathbf{m})(k^{\#}(i) \in b_{\mathbf{q}(i)})\| \\
&\qquad \overset{\text{Lem. 6.4}}{=} \bigwedge_{i\in m} \|k^{\#}(i) \in b_{\mathbf{q(i)}}\| \\
&\qquad \overset{\text{Lem. 8.4}}{=} \bigwedge_{i\in m} \|a_{k(i)} \in b_{\mathbf{q(i)}}\| \\
&\qquad \overset{\text{Lem. 8.11}}{=} \bigwedge_{i\in m} \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, (\forall n \in \mathrm{Vb}(q(i)))\, (f(k(i),n) = q(i)(n))\} \\
&\qquad \overset{\text{Def. } q}{=} \bigcap_{i\in m} \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, \forall n((h(i),n) \in \mathrm{Vb}(p) \Rightarrow f(k(i),n) = p(h(i),n))\} \\
&\qquad = \{f \in 2^{\omega\times\omega} \,|\, f \supseteq r\} \\
&\qquad = \mathfrak{b}_r\ ,
\end{aligned}$$

wobei $r \in P$ die Bedingung ist mit $\mathrm{Vb}(r) = \{(k(i),n) \,|\, i < m \wedge (h(i),n) \in \mathrm{Vb}(p)\}$ und $r(k(i),n) = p(h(i),n)$ für jedes $(k(i),n) \in \mathrm{Vb}(r)$. Somit ist nun

$$\mathfrak{b}_p \wedge \mathfrak{b}_r \leq \|\Phi(u_1,\ldots,u_n,k^{\#})\| \tag{8.6}$$

zu zeigen. Da jedes u_i entweder b oder $\mathbf{s}$ für ein $s \in S$ ist, gilt $\mathtt{occ}(\Phi(u_1,\ldots,u_n,h^{\#}) = \mathtt{occ}(h^{\#}) = \{a_{h(0)},\ldots,a_{h(m-1)}\}$. Sei nun p'' die Einschränkung von p auf alle Paare $(h(i),l)$ mit $i < m$. Da $p \Vdash \Phi(u_1,\ldots,u_n,h^{\#})$ gilt, folgt gemäß Lemma 8.9 nun auch $p'' \Vdash \Phi(u_1,\ldots,u_n,h^{\#})$. Da h injektiv ist, existiert eine Permutation σ mit $\sigma(h(i)) = k(i)$ für jedes $i < m$. Offensichtlich gilt $\sigma(h^{\#}) = k^{\#}$, und gemäß der Definition von r gilt auch $\sigma(p'') = r$. Mit Lemma 8.8 folgt damit

$$r = \sigma(p'') \Vdash \Phi(\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n),\sigma(h^{\#})) \equiv \Phi(u_1,\ldots,u_n,k^{\#})\ ,$$

und das bedeutet aufgrund der Definition von $\Vdash$ nun

$$\mathfrak{b}_r \leq \|\Phi(u_1,\ldots,u_n,k^{\#})\|\ ,$$

womit nun auch (8.6) bewiesen ist. □

Da nun der Gesamtbeweis der Konsistenz von ZF+BPI+¬AC endlich abgeschlossen ist, stellt sich vielleicht noch die Frage, warum ich in meiner Diplomarbeit einen mittlerweile 23 Jahre alten und damit eigentlich auch *veralteten* Artikel bearbeitet habe. Dazu möchte ich zwei Gründe anführen.

Nachdem Cohen mit seinen Arbeiten und der darin beschriebenen Forcingmethode die Möglichkeit eröffnete, Unabhängigkeitsresultate in der Mengenlehre zu beweisen, beschäftigten sich sehr viele Mathematiker mit derartigen Beweisen, und es wurde von fast sämtlichen relevanten über ZF hinausgehenden Prinzipien geklärt, in welcher Beziehung sie untereinander stehen. Auch die Forcingmethoden an sich wurden verfeinert und ausgebaut. Wenn aber auch sämtliche „klassischen“ Fragestellungen gelöst sind, so tauchen aber immer wieder noch weitere Prinzipien auf, von denen z. B. nicht klar ist, ob sie äquivalent zu AC sind oder nicht. Ein Beispiel dafür ist das *mengentheoretische Induktionsprinzip*, das folgendes besagt: Ist eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$ (mit einer beliebigen Menge X) gegeben, die sämtliche endlichen Teilmengen von X enthält und die gegenüber der Bildung von beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist, so handelt es sich bereits um $\mathfrak{P}(X)$. Dieses Prinzip läßt sich sicherlich mit AC beweisen, und es ist auch ein Beweis mit MC (**M**ultiple **C**hoice: Bei MC wird nicht wie bei AC jeweils ein Element aus einer Familie nichtleerer Mengen ausgewählt, sondern nur jeweils eine nichtleere endliche Teilmenge.) bekannt. Da aber in ZF (nicht aber in ZF_0) AC und MC äquivalent sind, ist die Frage noch nicht geklärt, ob in ZF das mengentheoretische Induktionsprinzip schwächer als das Auswahlaxiom ist. Meiner Meinung nach gibt es also immer noch Anwendungen für Forcingmethoden.

Gerade der vorliegende Forcingbeweis zeigt weiterhin auch sehr schön, daß es durchaus sinnvoll ist, in der Mathematik ab und zu die klassische Logik zu verlassen und z. B. mehrwertige Logiken zu betrachten. Es verstärkt sich seit einigen Jahren der Trend zur Fuzzylogik und zu Fuzzymengen, wo auch Wahrheitswerte echt zwischen wahr und falsch betrachtet werden (siehe z. B. [Zimm91] oder [DuPr80]). Doch in dieser Logik benutzt man statt vollständiger Boolescher Algebren das reelle Einheitsintervall $[0,1]$. Ich möchte kurz beschreiben, wie in der Fuzzylogik und in Forcingbeweisen eine Verallgemeinerung des Mengenbegriffes stattfindet. Bei einer fest vorgegeben (normalen) Menge X werden in der Fuzzylogik die unscharfen Teilmengen charakterisiert als die Funktionen von X nach $[0,1]$. Da gewöhnliche Teilmengen von X mit ihren charakteristischen Funktionen, die von X nach $\{0,1\}$ gehen, identifiziert werden können, handelt es sich hier also um eine echte Erweiterung des Potenzmengenbegriffes. Bei Forcingbeweisen (wenn auch nicht bei dem hier vorliegenden) wird folgende Hierarchie definiert:

(i) $M_0^B = \emptyset$, $M_\alpha^B = \bigcup\{M_\beta^B \mid \beta < \alpha\}$, falls α eine Limeszahl ist,

(ii) $M_{\alpha+1}^B = \{f \mid \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{Vb}(f) \subseteq M_\alpha^B \wedge \mathrm{Nb}(f) \subseteq B\}$

(iii) $M^B = \bigcup\{M_\alpha^B \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$.

Wie man sieht, sind sich beide Konzepte recht ähnlich. Doch bei der Fuzzylogik treten meines Erachtens zwei Probleme auf:

(i) Man beschränkt sich nur auf unscharfe Teilmengen einer *fest vorgegebenen normalen* Menge X. Es können also nur Begrifflichkeiten, die sich auf Teilmengen einer Menge X beziehen (z. B. Konzepte wie Unteralgebren oder Relationen), durch die Fuzzylogik verallgemeinert werden.

(ii) Es ist nicht offensichtlich, wie die mengentheoretischen Verknüpfungen $a \cup b$, $a \cap b$ und $X \setminus a$ (wobei a und b nun Funktionen von X nach $[0,1]$ sind) modelliert werden sollten. Normalerweise setzt man $a \cap b = \{\min\{a(x), b(x)\} \mid x \in X\}$, $a \cup b = \{\max\{a(x), b(x)\} \mid x \in X\}$ und $X \setminus a = \{1 - a(x) \mid x \in X\}$. Wenn man aber $a(x)$ als die Wahrscheinlichkeit ansieht, mit der x in der unscharfen Menge a liegt, so erscheinen die Definitionen der $\cap$- und $\cup$-Operationen eher als unplausibel (bei der $\cap$-Operation hätte man vielleicht statt der Minimumbildung von $a(x)$ und $b(x)$ deren Produkt vorgezogen). Auch die Komplementbildung ist eher unbefriedigend, gelten doch weder $(X \setminus a) \cup a = X$ (wobei das rechte X als die Funktion zu interpretieren ist, die jedem $x \in X$ die 1 zuordnet) noch $(X \setminus a) \cap a = \emptyset$ (wobei entsprechend $\emptyset$ die Funktion ist, die jedem $x \in X$ die 0 zuordnet).

Beide Probleme würden nicht entstehen, wenn man in der Fuzzylogik statt auf die bisherigen unscharfen Mengen auf die Mengen in M^B zurückgreifen würde. Es ist wohl auch erkennbar, daß sich einige Autoren von der strikten Einschränkung auf $[0, 1]$ trennen würden, doch mir ist nicht bekannt, ob man sich explizit schon vollständigen Booleschen Algebren zugewandt hat. Man darf aber natürlich auch nicht übersehen, daß die Wahl des Intervalles $[0, 1]$ grundsätzlich erst einmal am anschaulichsten erscheint, man sich bei Booleschen Algebren aber erst einmal klar werden müßte, wie verschiedene Elemente der Booleschen Algebra als Wahrscheinlichkeitsmaß des Enthaltenseins einer Menge in einer anderen zu interpretieren wären. Es liegt in der Fuzzylogik in diesem Zusammenhang vieles im Ermessensspielraum des jeweiligen Mathematikers, und die Festlegung von bestimmten unscharfen Mengen als Modelle bestimmter Entitäten ist sehr häufig Interpretationssache. Trotzdem bin ich der Meinung, daß sich in der Fuzzylogik eine Betrachtung des Umganges von Booleschen Algebren in Forcingbeweisen als fruchtbar erweisen würde.

$\sim$ *ENDE* $\sim$

Literaturverzeichnis

Artikel

[Bana85] Bernhard Banaschewski, *Prime elements from prime ideals*, Order 2 (1985), Seite 211–213. Beweis von (PIT)$\Longleftrightarrow$ (PET).

[Bana87] Bernhard Banaschewski, *More choice principles from the prime ideal theorem*, handschriftliche Note. Beweis von (BPI)$\Longleftrightarrow$(CSC) und (BPI)$\Longleftrightarrow$(STT).

[Bana90] Bernhard Banaschewski, *On coproducts of bounded distributive lattices*, handschriftliche Note

[BaEr93] Bernhard Banaschewski und Marcel Erné, *On Krull's separation lemma*, Order 10 (1993), Seite 253–260. Beweis der Äquivalenz des Krullschen Lemmas und (SPET).

[Band83] Hans-Jürgen Bandelt, *Coproducts of bounded (α, β)-distributive lattices*, Algebra Universalis 17 (1983), Seite 92–100

[Erné85] Marcel Erné, *A strong version of the prime ideal theorem*, unveröffentlicht. Beweis von (SPIT)$\Longleftrightarrow$(SPET).

[Halp64] James D. Halpern, *Independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem*, Fund. Math. 55 (1964), Seite 57–66. Sehr kurzer und für Nichtlogiker unverständlicher Beweis, daß in ZF_0 der Boolesche Primidealsatz schwächer als das Auswahlaxiom ist.

[HaLä66] James D. Halpern und H. Läuchli, *A partition theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), Seite 360–367. Beweis des kombinatorischen Baumlemmas, das zum Beweis von (BPI) in SP nötig ist. Benutzt das Lemma von König, auf das aber verzichtet werden kann, wenn die betrachteten Bäume abzählbar sind.

[HaLé71] James D. Halpern und Azriel Lévy, *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice*, Proc. Symp. Pure Math. 13, I (1971), Seite 88–134. Recht ausführlicher und verständlicher Beweis, daß in ZF der Boolesche Primidealsatz schwächer als das Auswahlaxiom ist. Wesentliche Grundlage dieser Diplomarbeit.

[Göde31] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, Monatshefte Math. Phys. 38 (1931), Seite 173-198. Klassiker.

[Göde38] Kurt Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. U.S.A. 24 (1938), Seite 556–557

[Göde39] Kurt Gödel, *Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. U.S.A. 25 (1939), Seite 220–224

[Göde40] Kurt Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Ann. Math. Studies 3 (1940). Beweis, daß das Konstruktibilitätsaxiom konsistent zu ZF ist.

[Jech66] Thomas Jech, *Interdependence of weakened forms of the axiom of choice*, Comment. Math. Univ. Carolinae 7 (1966), Seite 359–371

[Para69] I. I. Paravičenko, *Topological equivalents of the Tihonov theorem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 184 (1969), Seite 38–39 oder Soviet Math. Soc. 10 (1969), Seite 33–34. Schwer verständlicher Artikel mit vielen Querverweisen, der im wesentlichen die Äquivalenz einer dem Satz von Rado ähnliche Aussage zu (BPI) zeigt.

[ScSo71] Dana S. Scott und Robert M. Solovay, *Boolean-valued models for set theory*, Proc. Symp. Pure Math. 13, II (1971)

[Wolk67] E. S. Wolk, *On theorems of Tychonoff, Alexander and R. Rado*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), Seite 113–115. Beweis, daß aus dem Satz von Rado das Alexandersche Subbasislemma folgt.

Bücher

[Cohe66] Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hyphothesis*, W. A. Benjamin Inc. 1966. Eher unverständliche Einführung in Forcingbeweise vom Erfinder des Forcing persönlich.

[DuPr80] Didier Dubois und Henri Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press 1980

[Jech73] Thomas Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland 1973. Äußerst knappe Einführung in Forcingbeweise mit vielen Resultaten.

[Jech78] Thomas Jech, *Set Theory*, Academic Press 1978. Ebenso umfangreiche wie knappe Einführung in die Mengenlehre. Forcingbeweise kommen bereits im ersten Drittel dieses Werkes vor.

[Kune80] Kenneth Kunen, *Set Theory*, North-Holland 1980. Hervorragende Einführung in Forcingbeweise, die aber zuviel anderen Stoff enthält.

[Lévy79] Azriel Lévy, *Basic Set Theory*, Springer Verlag 1979. Eher elementare und sehr gut lesbare und durchdachte Einführung in die Mengenlehre.

[Mate69] Benson Mates, *Elementare Logik*, Vandenhoeck & Ruprecht 1969. Vom Stoff sehr elementare Einführung in die Logik, die aber dafür sehr ausführlich und kompetent auf viele sowohl philosophische als auch pragmatische Fragen zur Logik eingeht, die in fast allen anderen Werken übergangen werden.

[Mend64] Elliott Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton 1964

[Monk69] J. D. Monk, *Introduction to Set Theory*, McGraw-Hill 1969

[Rubi85] Herman Rubin und Jean E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice, II*, North-Holland 1985. Äußerst umfangreiche Übersicht über zu (AC) äquivalente Aussagen.

[Shoe67] Joseph R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley 1967

[Vorles] Diverse Vorlesungen und Übungen an der Universität Hannover zwischen 1989 und 1994, insbesondere von H. P. Podewski zur Logik und Mengenlehre, von M. Holz zu Forcing-Beweisen und von M. Erné zur Verbandstheorie und zu Booleschen Verbänden.

[Zimm91] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory — and its Applications*, Kluwer Academic Publishers 1991

Index